

NIEZWYKLE SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

ANDRZEJ DRAGAN



PRZED SPOŻYCIEM

Niniejsza książeczka powstała z myślą o studentach bawiących na wykładzie z teorii względności, który prowadziłem po raz pierwszy w 2001 roku w Szkole Nauk Ścisłych PAN (zasymilowanej później przez Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego), a w kolejnych latach na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Pisana była również z nadzieją, że okaże się przydatna wszystkim tym, którzy są zainteresowani samodzielnym studiowaniem teorii względności od podstaw.

Wykład ten został spisany bynajmniej nie po to, żeby dzielić się jakąś wiedzą. Powstał on raczej po to, żeby po zakończonej lekturze Czytelnik na dźwięk zwrotu „przybliżenie nierelatywistyczne” robił się nieco markotny, bowiem teoria względności jest nie tylko zadziwiająco prosta i intuicyjna, ale przede wszystkim niezwykle ciekawa. Nie potrzeba żadnej wstępnej wiedzy, wszystko, o czym tu mowa, można zrozumieć posiadając niewiedzę wręcz encyklopedyczną. Potrzebny jest tylko zapał, skupienie oraz umiejętne gospodarowanie zdrowym rozsądkiem. Dlatego szczególny nacisk położony został na ograniczenie do absolutnego minimum aparatu matematycznego potrzebnego do zapoznania się z wyłożonym materiałem. Celem było napisanie i do rzeczy, i do ludzi, dlatego z wyjątkiem rozdziału jedenastego zawierającego rozważania dotyczące elektrodynamiki klasycznej, strona matematyczna prowadzonego wykładu rzadko wykracza stopniem trudności poza elementarne przekształcenia algebraiczne. W fachowej literaturze dotyczącej przedstawianych tu zagadnień złożoności analizy matematycznej przysyłają często spore i tak trudności pojęciowe. Niejednokrotnie natomiast rzeczy, których nie potrafimy wyjaśnić własnej babci, sami nie rozumiemy. Smakowitym przykładem jest zjawisko precesji Thomasa. Z tajemniczych powodów jest ono pomijane w przeważającej części podręczników teorii względności (jako zbyt trudne?!), a jeśli już spotyka się je w literaturze, to wyjaśnione jest ono przy użyciu przybornika intelektualnego zawierającego pojęcia takie jak grupoidy asocjacyjno-komutatywne, żyrogrupy i przestrzenie żyrowektorowe, grupy przekształceń

holonomicznych, algebry Clifforda-Diraca, formalizm tetradowy, itp, itd. Natomiast w rozdziale trzecim tejże książeczki równanie precesji Thomasa wyprowadzone jest na jednej karteczce elementarnym rachunkiem wektorowym. Będąc fanem edukacji, a niekoniecznie edukacjonizmu, liczę, że wykład, który niniejszym przedkładam stanowić będzie pożywną paszę dla osób chcących po raz pierwszy zapoznać się dogłębnie z teorią względności, a pozbawionych wiadomości z zakresu matematyki wyższej i najwyższej. Osoby zainteresowane bardziej sformalizowanym i zmatematyzowanym podejściem, niewątpliwie ciekawym samym w sobie, muszą się niestety obejść smakiem lub też sięgnąć po inną pozycję z bogatej literatury dotyczącej tego tematu.

Wykład podzielony został na dwie części - w pierwszej, ortodoksyjnej, znajduje się to, co powinien wiedzieć i rozumieć każdy szanujący się absolwent kursu fizyki relatywistycznej. Rozważania snuły się jednak tak płynnie, że ni stąd, ni zowąd, dojrzały do układów nieinercjalnych, horyzontów zdarzeń i statycznej czarnej dziury, na której postawiona została kropka porzucająca Czytelnika w irytującym, zapewne, suspense. Apokryficzna część druga zawiera natomiast próbę dopełnienia szczególnej teorii względności treścią, której w moim przekonaniu brakuje w sformułowaniu doktrynalnym, a która może okazać się brakującym łącznikiem z teorią kwantową.

Za liczne pomyłki i nieścisłości, które niechybnie zostały przeze mnie popełnione i nie dostrzeżone, niech diabeł poniesie mnie na oklep w otchłań hańby.

ANDRZEJ DRAGAN

Spis treści

I	W E R S E T Y O R T O D O K S Y J N E	7
1	TRZĘSIENIE ZIEMI	9
1.1	TRANSFORMACJA LORENTZA <i>a'la</i> MINKOWSKI	9
1.2	CZASOPRZESTRZEŃ	14
1.3	RUCH CZYLI OBRÓT HIPERBOLICZNY	14
1.4	NIC NIE MOŻE PORUSZAĆ SIĘ SZYBCIEJ OD ŚWIATŁA?	17
1.5	PARADOKSY PRZYCZYNOWO-SKUTKOWE	18
1.6	INTERWAŁ CZASOPRZESTRZENNY I JEGO ROLA	20
	Pytania	22
	Zadania	22
2	JAK POWIEDZIAŁO SIĘ A, TRZEBA POWIEDZIEĆ $\hat{A}$	25
2.1	WIELOZNACZNA JEDNOCZESNOŚĆ	25
2.2	DYLATACJA CZASU	26
2.3	SKRÓCENIE LORENTZA	27
2.4	PARADOKS TUNELU WZDŁUŻ WISŁY	29
2.5	CZY SKRÓCENIE LORENTZA JEST RZECZYWISTE?	29
2.6	ELEKTRYZUJĄCY PARADOKS ELEKTRYCZNY	32
2.7	PARADOKS BLIŹNIĄT	36
2.8	ZAKAZ OGLĄDANIA PLECÓW	38
2.9	PARADOKS ROBERTA KORZENIOWSKIEGO	39
2.10	RELATYWISTYCZNE TRANSFORMACJE PRĘDKOŚCI	42
2.11	NOWE DOWODY W SPRAWIE RZEKOMEJ ŚMIERCI ELVISA P.	46
	Pytania	48
	Zadania	49

3	OBRÓT THOMASA-WIGNERA	51
3.1	OBRÓT KOTA FILEMONA	51
3.2	PRECESJA THOMASA	54
3.3	KOTA FILEMONA ROZWAŻAŃ CIĄG DALSZY	57
	Pytania	58
	Zadania	59
4	LUŻNA BRYŁA SZTYWNA	61
4.1	KAŻDY KIJ MA DWA KOŃCE (ALE PROCA MA TRZY)	61
4.2	PARADOKS TYCZKARZA I STODOŁY	62
4.3	PARADOKS DWÓCH KWADRATÓW	64
4.4	PARADOKS KLOCKA NA DZIURAWYM STOLE	65
4.5	NAPIĘCIA WEWNĘTRZNE	67
	Pytania	69
	Zadania	69
5	KŁOPOTY Z TEORIĄ KWANTOWĄ	71
5.1	INTERFEROMETR MACHA-ZEHNDERA	71
5.2	ZJAWISKO EPR I ZACHWIANIE PRZYZYNOWOŚCI	74
5.3	NIERÓWNOŚCI BELLA	76
	Pytania	80
	Zadania	80
6	ŚWIATŁO	83
6.1	RELATYWISTYCZNY EFEKT DOPPLERA	83
6.2	UNOSZENIE ŚWIATŁA PRZEZ RUCHOMY OŚRODEK	84
6.3	ODBICIE ŚWIATŁA OD LUSTRA	85
	Pytania	86
	Zadania	87
7	POZORNE DEFORMACJE RUCHOMYCH OBIEKTÓW	89
7.1	OKRĄG W KSZTAŁCIE KIELBASY	89
7.2	KULA W KSZTAŁCIE KULI	92
	Pytania	95

Zadania	96
8 DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA	97
8.1 KONIEC TRZY PO TRZY. CZTEROWEKTORY.	97
8.2 MAGICZNA CZTEROREGULA	99
8.3 CZTEROPRĘDKOŚĆ I JEJ WSPÓŁZMIENNICZOŚĆ	100
8.4 CZTEROPĘD	102
8.5 $E = mc^2$	105
8.6 RELATYWISTYCZNA SIŁA I II PRAWO NEWTONA	107
8.7 HIPOTEZA PLANCKA	109
8.8 KLASYFIKACJA CZTEROWEKTORÓW	110
Pytania	111
Zadania	111
9 UKŁADY NIEINERCJALNE	113
9.1 CZTEROPRZYSPIESZENIE	113
9.2 POSTULAT ZEGARA POD LUPĄ	115
9.3 RUCH JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY	116
9.4 PARADOKS BELLA	119
9.5 UKŁAD ODNIESIENIA JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY	119
9.6 ZEGARY CHODZĄCE WSTECZ	124
9.7 TRANSFORMACJA RINDLERA	125
9.8 RUCH SWOBODNY WEDŁUG OBSERWATORA PRZYSPIESZONEGO	128
9.9 PARADOKS GŁODNEGO GAWŁA	131
9.10 ENERGIA SWOBODNEJ CZĄSTKI	132
9.11 ZNACZENIE WIELKOŚCI LOKALNYCH	134
9.12 PARADOKS BLIŹNIĄT OKIEM PAWŁA	135
Pytania	137
Zadania	138
10 ZAKRZYWIONA CZASOPRZESTRZEŃ	141
10.1 METRYKA ZAKRZYWIONEJ CZASOPRZESTRZENI	141
10.2 RUCH SWOBODNY W KRZYWEJ CZASOPRZESTRZENI	144
10.3 PARADOKS LEWITUJĄCEGO KAMIENIA	148

10.4 ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI	149
10.5 MAKSYMALNA SIŁA RAŻENIA ZGNIŁEGO JAJKA	150
10.6 CZARNA DZIURA	151
10.7 POŻARCIE PRZEZ CZARNĄ DZIURĘ	159
Pytania	161
Zadania	162
11 ELEKTRODYNAMIKA	163
11.1 PRELUDIUM	163
11.2 POTENCJAŁ PORUSZAJĄCEGO SIĘ ŁADUNKU	164
11.3 W POSZUKIWANIU KOLEJNYCH CZTEROWEKTORÓW	169
11.4 ENERGIA I PĘD POLA	172
11.5 TRANSFORMACJE PÓŁ	174
11.6 SIŁA LORENTZA I III PRAWO NEWTONA	177
11.7 ELEKTRODYNAMIKA VS ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI	178
Pytania	183
Zadania	183
II A P O K R Y F Y	185
12 DLACZEGO DIABEŁ GRA W KOŚCI?	187
12.1 CO WSPÓLNEGO MA PRĘDKOŚĆ ŚWIATŁA ZE ŚWIATŁEM?	187
12.2 BEZPRZYCZYNOWOŚĆ	190
12.3 DRUGA TRANSFORMACJA LORENTZA	193
12.4 W PROCH SIĘ SPONTANICZNIE OBRÓCISZ	195
12.5 SUPERPOZYCJA LINII ŚWIATA	198
Pytania	200
Zadania	200
BIBLIOGRAFIA	201
INDEX	202

Część I

W E R S E T Y O R T O D O K S Y J N E

Rozdział 1

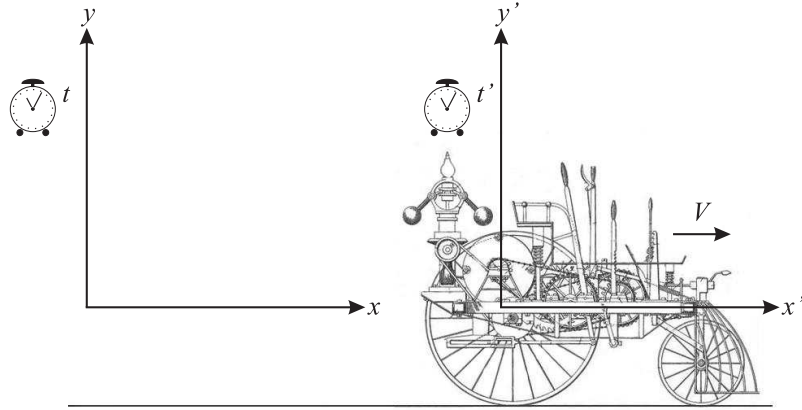
TRZĘSIENIE ZIEMI

W jaki sposób wytłumaczyć osobie niewidomej od urodzenia, że odległe przedmioty „są” mniejsze od przedmiotów znajdujących się blisko? Zbyt trudne? Obawiam się, że przed nami podobne wyzwanie. Odsłoniemy bowiem kulisy rzeczywistości, nie znanej na co dzień, jednak w odpowiednich warunkach możliwej do zaobserwowania ze wszystkimi swoimi kuriozalnymi konsekwencjami. Postaramy się wyobrazić sobie jak doświadczylibyśmy jej na własnej skórze, czyli podejmiemy się zadania zbliżonego stopniem trudności do zgadywania co czuje pies.

1.1 TRANSFORMACJA LORENTZA *a’la* MINKOWSKI

Punktem wyjścia w naszym rozumowaniu będzie przedziwny fakt znany z doświadczenia: światło w próżni zawsze porusza się z prędkością c . Co rozumiemy przez „zawsze”? Chodzi tu o ruch we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Na przykład światło opuszczające reflektory jadącego szybko samochodu oddala się od kierowcy z prędkością c . Ale z tą samą prędkością zbliża się ono do stojącego na chodniku pieszego, niezależnie od tego jak szybko jedzie samochód. Fakt ten jest niezwykle osobliwy, gdyż wydawać by się mogło, że światło powinno zbliżać się do pieszego z prędkością równą $c + V$, gdzie V jest prędkością samochodu. Przyroda nie spełnia jednak naszych zachcianek i gdyby świat był taki jak nam się wydaje, to byłby zupełnie inny.

Zatem jeśli światło poruszające się pomiędzy punktami A i B w pewnej chwili t_A opuściło punkt o współrzędnych (x_A, y_A, z_A) , a w chwili t_B dotarło do punktu (x_B, y_B, z_B) , to rzecz jasna spełnione jest równanie (droga) = (prędkość) $\times$ (czas), czyli:



Rysunek 1.1: Dwa układy współrzędnych poruszające się względem siebie z prędkością V wzdłuż osi x . Początki układów pokrywały się w chwili $t = t' = 0$. Przyjęta notacja (zmiennie primowane i nieprimowane) będzie stosowana w całym wykładzie, chyba że zostanie wyraźnie powiedziane że jest inaczej.

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = c(t_B - t_A) \quad (1.1)$$

i zgodnie z wynikami znanych eksperymentów prędkość c jest we wszystkich układach jednakowa. Oznacza to, że powyższe równanie ma tę samą postać w dowolnym układzie inercyjnym. Jeśli więc opisuje ono obserwacje prowadzone przez osobę stojącą na chodniku, to analogiczne równanie może zapisać obserwator przejeżdżający w pobliżu samochodem jadącym ze stałą prędkością $\mathbf{V}$. Oznaczmy współrzędne tego drugiego obserwatora symbolami primowanymi – jak na rysunku 1.1.

Naszym celem będzie teraz wyznaczenie transformacji współrzędnych pomiędzy dwoma rozważanymi układami inercyjnymi. O transformacji tej założymy jedynie, że jest liniowa, bo tylko takie przekształcenie nie wyróżnia żadnego punktu w przestrzeni i czasie. Stałość prędkości światła w obu układach oznacza, że jeśli pierwszy obserwator stwierdza, że zachodzi równość $0 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$, to według drugiego obserwatora musi zajść równość $0 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$. Natomiast dla dwóch absolutnie dowolnych zdarzeń A i B (niekoniecznie połączonych impulsem światła) rozważane powyżej kwadratowe wyrażenie $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ przetransformuje się w wyniku zmiany układu odniesienia na pewien wielomian W drugiego rzędu w zmiennych primowanych, którego współczynnikami będą stałe zależące wyłącznie od prędkości $\mathbf{V}$. Wiemy jednak, że zawsze,

gdy zeruje się W , zeruje się także $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$, to zaś oznacza, że wielomian W oraz wielomian $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$, mają wszystkie miejsca zerowe wspólne. Można na podstawie tego udowodnić, że wielomiany te muszą być do siebie proporcjonalne:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = W = K(\mathbf{V})(c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2), \quad (1.2)$$

gdzie K jest pewną stałą. Jednakże rozpoczynając rozważania od układu primowanego i przechodząc do układu nieprimowanego dostalibyśmy relację odwrotną:

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = K(-\mathbf{V})(c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2), \quad (1.3)$$

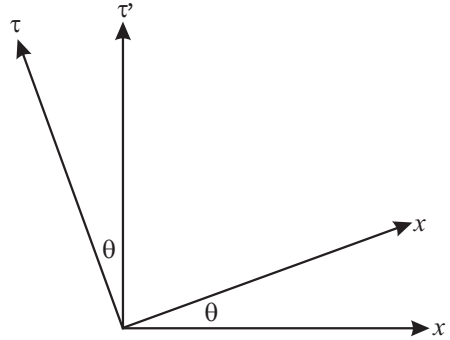
co po wstawieniu do poprzedniego równania prowadzi do wniosku, że $K(\mathbf{V})K(-\mathbf{V}) = 1$. Rozważane wyrażenia są kwadratowe, zatem nie mogą zależeć od tego, w którą stronę skierowane są poszczególne osie współrzędnych i w konsekwencji stała K nie może zależeć od kierunku prędkości, a jedynie od jej wartości V . To zaś oznacza, że $K(V) = \pm 1$. Ujemne rozwiązanie możemy szybko wyeliminować rozważając przejście graniczne $V \rightarrow 0$. Nasze rozważania prowadzą zatem do wniosku, że dla dowolnych dwóch zdarzeń **A** i **B** zachodzi następująca relacja pomiędzy ich współrzędnymi w dwóch układach inercjalnych:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (1.4)$$

Aby dostrzec, co otrzymany wynik oznacza zastosujemy podstawienie: $\tau = ict$, czyli wprowadźmy tajemniczy czas urojony (pamiętając, by nie przesadzać z wyobraźnią). Przepisując poprzedni wzór otrzymujemy:

$$\Delta\tau^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta\tau'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2. \quad (1.5)$$

Wyrażenie (1.5) wygląda jak równość dwóch odległości w jakiejś abstrakcyjnej, czterowymiarowej przestrzeni. Porzućmy na razie kwestię interpretacji fizycznej tej przestrzeni i zastanówmy się nad stroną czysto matematyczną. Mamy do czynienia z dwoma czterowymiarowymi układami współrzędnych, pomiędzy którymi istnieje jakaś transformacja zachowująca odległości pomiędzy punktami. Przykładem takiej transformacji może być

Rysunek 1.2: Obrót układu współrzędnych w płaszczyźnie (τ, x) .

lustrzane odbicie albo zmiana kierunku upływu czasu. Jeśli oba układy różniłyby się wyłącznie znakiem jednej ze współrzędnych, oczywiście odległości między dowolnymi dwoma punktami byłyby jednakowe w obu tych układach, zgodnie ze wzorem (1.5). Inną prostą transformacją, która nie zmienia odległości jest obrót. Obroty, odbicia, przesunięcia oraz ich złożenia, to jedyne transformacje *liniowe* nie zmieniające odległości pomiędzy dowolnymi punktami. Interesują nas wyłącznie transformacje liniowe, dlatego, że tylko one nie wyróżniają w przestrzeni i czasie żadnych punktów.

Przejście do układu poruszającego się nie wiąże się ani z odbiciem współrzędnych przestrzennych, ani z odwróceniem biegu czasu, ani z przesunięciem współrzędnych, ani z przestrzennym obrotem, ani nawet ze złożeniem tych wszystkich transformacji. Cóż zatem pozostaje? Tu musimy na moment oderwać się intelektualnie od żucia gumy i pogłówekować. Zostaje nam tylko jedna możliwość: obrót w płaszczyźnie zawierającej oś czasu τ oraz jakiś kierunek przestrzenny. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że samochód porusza się względem pieszego wzdłuż osi x , więc rozważać będziemy obrót w jedynej wyróżnionej płaszczyźnie (τ, x) – rysunek 1.2. Jeśli przyjmimy, że w chwili $t = t' = 0$ początki obu układów odniesienia pokrywały się, to transformacja będzie miała ogólną postać:

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau \cos \theta + x \sin \theta = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} + \frac{x \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \\ x' &= x \cos \theta - \tau \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} - \frac{\tau \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},\end{aligned}\tag{1.6}$$

gdzie θ jest kątem obrotu. We wprowadzonych transformacjach występuje nieznaną kąt θ . Domyślamy się, że musi on jakoś zależeć od prędkości V (wiemy na przykład, że dla

$V = 0$, również $\theta = 0$), no bo od czegoż by innego? Aby wyznaczyć tę zależność rozważmy ruch początku układu współrzędnych związanego z samochodem: $x' = 0$. Z perspektywy obserwatora stojącego na chodniku, punkt ten oddala się z prędkością V wzdłuż osi x . Korzystając z drugiego z równań (1.6) dostajemy:

$$x' = 0 \Rightarrow \frac{x}{\tau} = \frac{x}{ict} = \frac{V}{ic} = \operatorname{tg} \theta, \quad (1.7)$$

czyli kąt θ okazuje się również być urojony. Pokazuje to, że mamy tu do czynienia nie z rzeczywistym obrotem, lecz z pewnym obrotem o pseudo-kąt. Wstawiając do równań (1.6) znaną wartość $\operatorname{tg} \theta$ oraz powracając do używania t zamiast τ otrzymujemy słynne wzory opisujące *transformację Lorentza*:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Widać, że transformacja zachowuje się kulturalnie, dopóki rozważamy układy inercjalne poruszające się z prędkościami $V < c$. W przeciwnym wypadku pojawiają się w niej liczby zespolone. Transformację odwrotną możemy znaleźć na dwa sposoby: albo pomanipulować równaniami odwracając zależność, albo po prostu zamienić V na $-V$. Wynik oczywiście jest ten sam:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Zwróćmy uwagę, że w granicy $c \rightarrow \infty$ znalezione transformacje przechodzą w równania, nazywane *transformacją Galileusza*:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

W rzeczywistości przed dokonaniem relatywistycznego przewrotu, nikt nie zapisywał tej transformacji w powyższy sposób. Nie uważano za konieczne rozważania czasu osobno w obu układach współrzędnych. Czas rozumiano wyłącznie jako pewien tajemniczy parametr nie związany z przestrzenią, a cała transformacja była trywialna (nikt nie nazwałby tego nawet transformacją). „Po prostu” $x' = x - Vt$.

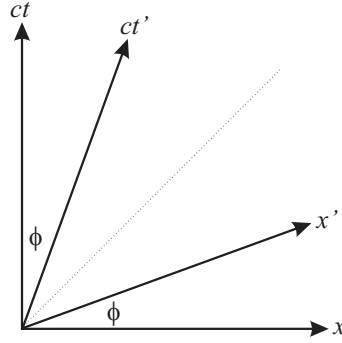
Podejście Minkowskiego ujawnia jednak, że czas przypomina jeden z wymiarów przestrzennych. Niewątpliwą różnicą, choć nie wiadomo czy jedyną, jest czynnik i , który wprowadziliśmy, by ujednolicić obraz czterowymiarowej przestrzeni.

1.2 CZASOPRZESTRZEŃ

Rozważania z poprzedniego podrozdziału prowadzą do niezwykle ciekawego wniosku: czas i przestrzeń nie mogą być traktowane niezależnie. Z tego powodu wprowadza się w teorii względności koncepcję czterowymiarowej *czasoprzestrzeni*. Zrozumienie tego pojęcia pozwala oswoić się z przedziwnymi wnioskami z jakimi przyjdzie nam się jeszcze zmierzyć. Różne tempo upływu czasu, fizyczna zmiana długości poruszających się obiektów bez istnienia wewnętrznych napięć w materiale – wszystko to staje się niemal naturalne, gdy zdamy sobie sprawę, że przejście do układu poruszającego się odpowiada pewnemu obrotowi w czasoprzestrzeni. Pytania typu „jaki jest naprawdę upływ czasu?” albo „jaka jest prawdziwa długość?” mają taki sam sens jak spieranie się, jaki kolor ma ułożona kostka Rubika. Dla osoby patrzącej z jednej strony kostka jest niebieska, dla innej – czerwona. Kto ma rację? Pytanie o rację jest, jak widzimy źle postawione. Wystarczy obrócić kostkę i obserwatorzy zmieniają zdanie. Podobnie jest z obserwacją świata z różnych, poruszających się względem siebie układów inercjalnych.

1.3 RUCH CZYLI OBRÓT HIPERBOLICZNY

Zauważyliśmy poprzednio, że zastępując czas rzeczywisty czasem urojonym, możemy odgadnąć, że transformacja Lorentza jest urojonym pseudo-obrotem w urojonej czasoprzestrzeni. Spróbujemy teraz stwierdzić jaka jest interpretacja geometryczna tej transformacji w zwykłej, rzeczywistej czasoprzestrzeni. Zapiszmy równania (1.6) przy użyciu czasu rzeczywistego:



Rysunek 1.3: Osie czasoprzestrzenne dwóch układów inercjalnych.

$$ict' = ict \cos \theta + x \sin \theta$$

$$x' = x \cos \theta - ict \sin \theta. \quad (1.11)$$

Aby pozbyć się z transformacji liczb urojonych skorzystamy z elementarnych tożsamości algebraicznych łączących funkcje trygonometryczne z ich hiperbolicznymi odpowiednikami:

$$\sin \theta = -i \sinh i\theta$$

$$\cos \theta = \cosh i\theta. \quad (1.12)$$

Wstawiając je do równań (1.11) i podstawiając $\vartheta = i\theta$ otrzymujemy:

$$ct' = ct \cosh \vartheta - x \sinh \vartheta$$

$$x' = x \cosh \vartheta - ct \sinh \vartheta. \quad (1.13)$$

Graficzna interpretacja transformacji Lorentza (1.13) znajduje się na rysunku (1.3) przedstawiającym osie dwóch układów inercjalnych poruszających się względem siebie. Równania osi układu primowanego możemy wyznaczyć korzystając z transformacji Lorentza (1.13).

Oś czasu jest wyznaczona równaniem $x' = 0$, natomiast oś przestrzenna jest zadana przez $ct' = 0$. Otrzymujemy stąd, że $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tgh} \vartheta = V/c$, gdzie ϕ jest kątem względnego nachylenia osi obu układów (rysunek 1.3). Widać, że osie układów, których prędkość dąży do c będą zbliżać się do przerywanej linii. Tory podświetlonych cząstek rozpoczynających swój ruch w $x = x' = 0$ muszą znajdować się wewnątrz pionowego stożka ograniczonego przerywaną linią, zwanego *stożkiem przyszłości*. Ponieważ brzeg stożka we wszystkich układach zadany jest tym samym równaniem, to cząstka, której prędkość jest mniejsza od c w jednym układzie, będzie również mniejsza od c w każdym innym układzie inercyjnym.

Poprzez bezpośrednie podstawienie wzorów (1.13), możemy sprawdzić, że zachodzi:

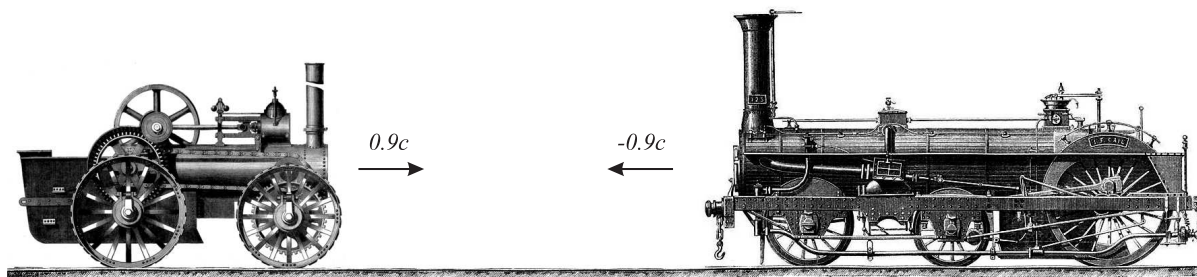
$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2, \quad (1.14)$$

co wraz z uzupełnieniem transformacji współrzędnych o warunki $y' = y$ oraz $z' = z$ daje równość (1.4), od której rozpoczęliśmy nasze rozważania. Znalezione przez nas przekształcenie (1.13) jest hiperbolicznym obrotem spokrewnionym ze zwykłym obrotem, ale ma miejsce w przestrzeni, w której długość wektora nie jest sumą, lecz różnicą kwadratów poszczególnych składowych. W tym sensie czasoprzestrzeń nie jest zwykłą, euklidesową przestrzenią, bo kwadrat długości jest w niej zdefiniowany jak w równaniu (1.4). Posiada ona jednak trójwymiarową i euklidesową podprzestrzeń.

Nasze rozważania obrotów w czasoprzestrzeni brzmią niezwykle. Dlaczego jednak jadąc autobusem nie doznajemy owych hiperbolicznych obrotów i wszystko wygląda zupełnie zwyczajnie? Ponieważ parametr ϑ występujący w przekształceniu (1.13) $\vartheta = \operatorname{atgh} V/c$ możemy zazwyczaj (dla niewielkich prędkości) przybliżyć przez $\vartheta \approx V/c$, to powyższa transformacja uzyskuje przybliżoną postać:

$$\begin{aligned} ct' &\approx ct - x\vartheta \\ x' &\approx x - ct\vartheta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Widać, że z pierwszego równania zostaje w przybliżeniu $t' \approx t$, a z drugiego $x' \approx x - Vt$, czyli transformacja Galileusza, do której jesteśmy przyzwyczajeni.



Rysunek 1.4: Z jaką prędkością pociągi zbliżają się do siebie według Zwrotniczego?

1.4 NIC NIE MOŻE PORUSZAĆ SIĘ SZYBCIEJ OD ŚWIATŁA?

Słyszysz się często, że „nic nie może poruszać się szybciej od światła”, czyli że wszystko porusza się od niego wolniej. Bez uprzedniego ustalenia co rozumiemy przez wszystko oraz przez porusza się, stwierdzenie to może doprowadzić do wielu nieporozumień, co ilustrują poniższe (kontr)przykłady.

Pewien Zwrotniczy obserwował kiedyś dwa pociągi zbliżające się do siebie z ogromną prędkością – rysunek 1.4. Jeden z pociągów poruszał się względem niego z prędkością $0.9c$, a drugi z prędkością $-0.9c$. Zwrotniczego zaintrygowało następujące pytanie: z jaką prędkością z jego punktu widzenia, pociągi zbliżają się do siebie? Stosując bezmyślnie regułkę „nic nie może poruszać się szybciej od światła” powiedzielibyśmy, że prędkości w jakiś dziwny sposób muszą się dodać tak, żeby wyszło coś mniejszego od c . Otóż nie! Jeżeli zdefiniujemy prędkość zbliżania się jako zmianę odległości między pociągami w czasie, to nie może wyjść nic innego niż $1.8c$! Natomiast, gdybyśmy zapytali jednego z maszynistów, z jaką prędkością zbliża się do niego drugi pociąg, bez wątpienia poda on prędkość mniejszą niż c – o tym będzie mowa później. Chcąc używać powiedzonka „nic nie może poruszać się szybciej od światła” musimy przede wszystkim pamiętać, że „poruszać się” oznacza tu „poruszać się względem mnie”. W teorii względności przez ruch rozumie się zazwyczaj ruch względem ustalonego obserwatora, a nie jak w przytoczonej sytuacji ruch względny dwóch obiektów z punktu widzenia niezależnego obserwatora. Jednak, jak wynika z kolejnych przykładów, stwierdzenie, że nic nie porusza się szybciej od światła wymaga dalszego doprecyzowania.

Na przyjęcie urodzinowe Królowny Śnieżki przyszło sto krasnoludków z całego lasu.

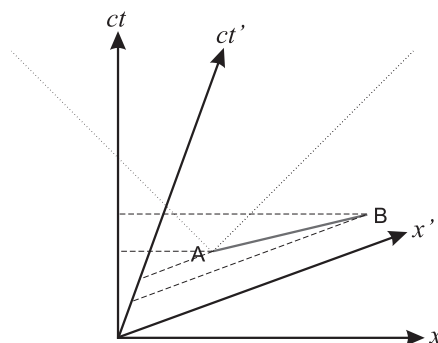
Postanowiły one zrobić Królownie niespodziankę i na jej cześć wykonać meksykańską falę, którą widziały w telewizji podczas transmisji meczu. Ponieważ wszystkie krasnoludki dostały kiedyś od Królowny w prezencie po zegarku, postanowiły użyć ich do wykonania fali. Krasnoludki zsynchronizowały swoje zegarki i ustawiły się w szeregu w równych odstępach. Następnie każdy krasnoludek podskoczył o ustalonej wcześniej godzinie, przy czym pierwszy z brzegu podskoczył punktualnie o 12.00, następny sekundę po dwunastej, kolejny dwie sekundy po dwunastej itd. Krasnoludki nie zwracały uwagi na stojących obok kompanów, tylko uważnie patrzyły na swoje zegarki i o umówionej godzinie podskakiwały. Zastanówmy się teraz, czy coś ogranicza prędkość takiej poprzecznej fali? Oczywiście nie. Krasnoludki mogą stać w dowolnie dużych odległościach, a ustalone odstępów czasu pomiędzy kolejnymi podskokami mogą być dowolnie krótkie. W szczególności, taka fala może poruszać się szybciej od światła (gdyby wszystkie krasnoludki podskoczyły jednocześnie, powiedzielibyśmy, że fala porusza się nieskończenie szybko). Sytuacja ta nie byłaby natomiast możliwa, gdyby krasnoludki podskakiwały dopiero w momencie gdy zobaczą, że kolega obok właśnie podskoczył.

Wydawałoby się, że przynajmniej światło w próżni powinno poruszać się z prędkością światła, prawda? Przeanalizujmy następującą sytuację: na środku okrągłej wyspy stoi latarnia morska, której kopuła obraca się, regularnie przemiatając wyrzucanym światłem pełny kąt. Wyobraźmy sobie teraz, że wzdłuż całego brzegu wyspy został rozstawiony wysoki parawan, po którym dookoła porusza się plama światła z latarni. Jaka jest dopuszczalna prędkość tej plamy? Czy jest to prędkość światła? Nic podobnego! Snop światła może poruszać się wzdłuż parawanu dowolnie szybko. Tym razem odpowiedź na pytanie, jak to możliwe pozostawiamy Czytelnikowi.

Co w takim razie oznacza stwierdzenie, że nic nie może poruszać się szybciej od światła? W tym przypadku milczenie nie jest złotem, dlatego nasze wątpliwości rozwieje chwilowo kolejny podrozdział.

1.5 PARADOKSY PRZYCZYNOWO-SKUTKOWE

Wyobraźmy sobie, że coś porusza się z prędkością większą niż c pomiędzy punktami A i B wzdłuż pewnej trajektorii – rysunek 1.5 (trajektorię w czasoprzestrzeni nazywa się *linią świata* poruszającego się obiektu). Może to być meksykańska fala krasnoludków, plama światła latarni morskiej, statek kosmiczny, cokolwiek. Z rysunku widać, że w układzie nie-



Rysunek 1.5: Tor obiektu poruszającego się pomiędzy punktami A i B z prędkością nadświetlną. Kropkowane linie ograniczają obszar dozwolony dla obiektów poruszających się z prędkościami mniejszymi niż c i zaczynającymi swój bieg w punkcie A. Linie przerywane rzutują punkty A i B na osie czasu dwóch różnych układów inercjalnych. Widać, że kolejność zdarzeń ulega odwróceniu.

primowanym poruszający się obiekt był w punkcie A wcześniej niż w punkcie B. Jednakże, jeśli linia świata znajduje się poza obszarem dozwolonym dla obiektów poruszających się wolniej niż c (kropkowany stożek), istnieją układy inercjalne, w których zdarzenie w punkcie A nastąpi później niż zdarzenie w punkcie B. To znaczy, jeśli coś porusza się pomiędzy dwoma punktami A i B szybciej niż światło, to w jednych układach odniesienia widać będzie ruch z A do B, a w innych z B do A, jak gdyby czas wewnątrz rozważanego obiektu płynął wstecz. Jeśli na przykład meksykańska fala krasnoludków według Królowej Śnieżki porusza się w prawo, to dla przelatującej na miotle Baby Jagi fala może poruszać się w lewo. Primowany układ Baby Jagi przedstawiono właśnie na rysunku 1.5.

Jeżeli rozważanym, nadświetlnym obiektem jest natomiast statek kosmiczny, od razu pojawia się pewien paradoks: w jednych układach odniesienia załoga statku będzie się starzeć, a w innych czas będzie płynąć w odwrotną stronę i załoga odmłodzić. W drastycznej wersji paradoksu w pewnych układach odniesienia kosmonauta mógłby najpierw umrzeć, a potem się urodzić. Ponieważ istnienie paradoksów tego typu byłoby cokolwiek problematyczne, powszechnie twierdzi się, że obiekty takie jak statek kosmiczny nie mogą poruszać się z prędkościami nadświetlnymi. Przyjmuje się również, że nie mogą istnieć nadświetlne sygnały niosące jakąkolwiek informację, bo w pewnych układach odniesienia informacja mogłaby być w posiadaniu odbiorcy zanim jeszcze została wysłana przez nadawcę. W szczególności, najczęściej ogranicza się rozważania tylko do układów inercjalnych poruszających się względem siebie z prędkościami $V < c$. Okazuje się jednak, że

bardzo ciekawe i zupełnie nowe aspekty tego zagadnienia pojawiają gdy do gry wkracza mechanika kwantowa – będzie o tym mowa później. W każdym razie kwestia jest niezwykle delikatna, a na pewno nie została dotychczas do końca zrozumiana.

Zamianę kolejności zdarzeń można przeanalizować przy pomocy wzorów transformacyjnych (1.8). Niech zdarzenie A oznacza wysłanie pewnego sygnału, a B jego dotarcie do odbiorcy. Jeśli w układzie nieprimowanym odległość przestrzenna pomiędzy A i B wynosi Δx , a odstęp czasu między nimi $\Delta t > 0$, to w układzie primowanym odstęp czasu wyniesie:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.16)$$

Przyjrzyjmy się licznikowi tego wyrażenia: $\Delta t - V\Delta x/c^2$. Jest on dodatni w każdym układzie inercjalnym poruszającym się z prędkością $V < c$, o ile $\Delta x \leq c\Delta t$, czyli jeżeli sygnał porusza się najwyżej z prędkością światła. Natomiast jeśli sygnał jest ponadświatłowy i $\Delta x > c\Delta t$, to w pewnych układach odniesienia $\Delta t' < 0$. Oznacza to, że w tych układach nadświatłowy sygnał musiałby propagować się od odbiorcy do nadawcy. Powracamy zatem do wniosków wyciągniętych na podstawie analizy rysunku 1.5.

1.6 INTERWAŁ CZASOPRZESTRZENNY I JEGO ROLA

Wyprowadzając transformację Lorentza zauważyliśmy, że wyrażenie:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (1.17)$$

nie zmienia się przy zmianie układu odniesienia, podobnie jak długość wektora w dowolnej euklidesowej przestrzeni nie zmienia się pod wpływem obrotów. Z powodu tej niezmienniczości wielkość Δs^2 odgrywa bardzo ważną rolę w teorii względności – nazywa się ją *interwałem* czasoprzestrzennym „pomiędzy” dwoma zdarzeniami oddzielonymi w czasie o Δt , a w przestrzeni o Δx , Δy i Δz . W szczególności, interwał czasoprzestrzenny pomiędzy zdarzeniami, w których został wyemitowany, a następnie pochłonięty impuls światła zawsze wynosi zero. Ponadto, jeżeli interwał Δs^2 pomiędzy dwoma zdarzeniami jest ujemny, to zdarzenia te nie mogą być połączone żadnym podświatłowym sygnałem. Interwały ujemne nazywa się *przestrzennymi*. Jeżeli interwał jest dodatni (interwał *czasowy*), to przesłanie

podświetlonej informacji pomiędzy zdarzeniami jest możliwe, natomiast jeśli wynosi on zero (interwał *zerowy*), to zdarzenia mogą zostać połączone tylko sygnałem poruszającym się dokładnie z prędkością światła.

Odkryliśmy, że wyrażenie (1.17) nie zmienia swojej wartości przy zmianie inercjalnego układu odniesienia. Konsekwencje tego faktu są bardzo ważne. Dzięki niemu teoria względności ma szansę w deterministyczny sposób opisywać świat. Wyobraźmy sobie, że zdarzenie B oznacza wybuch bomby w pewnym miejscu i w określonej chwili. Jeżeli bomba została uruchomiona zdalnym detonatorem umieszczonym w innym punkcie przestrzeni i we wcześniejszej chwili A, to interwał czasoprzestrzenny pomiędzy tymi dwoma zdarzeniami musi być czasowy lub zerowy. Z niezmienności interwału względem transformacji Lorentza wynika, że jeżeli w pewnym układzie nastąpił przyczynowo skutkowy ciąg zdarzeń (czyli ciąg w którym zachodzące zdarzenia wynikały ze zdarzeń wcześniejszych), to kolejność tych zdarzeń w innych układach inercjalnych nie zmieni się (czyli przyczynowość będzie zachowana). Jeśli bowiem w jednym układzie inercjalnym interwał między dwoma zdarzeniami jest dodatni, to taki też będzie w dowolnym innym układzie. W naszym bombowym przykładzie detonator będzie uruchamiany zanim wybuchnie bomba i odpowiednio wcześniej we wszystkich możliwych układach inercjalnych.

Jeżeli natomiast w pewnym układzie odniesienia dwa zdarzenia są oddzielone interwałem przestrzennym (czyli nie tworzą ciągu przyczynowo skutkowego), to będzie tak również w dowolnym innym układzie. Wynika to zresztą bezpośrednio z poprzedniego wniosku i odwracalności transformacji Lorentza.

Jest teraz dobra okazja by wspomnieć o bardzo ważnej zasadzie w teorii względności. Zasadzie, z której dotychczas po cichu korzystaliśmy nie będąc tego do końca świadomi. Brzmi ona tak: każde zdarzenie widziane w jednym układzie inercjalnym, musi zachodzić również w każdym innym inercjalnym układzie. Zatem nie da się stwierdzić, że układ inercjalny porusza się w sposób absolutny. Można jedynie stwierdzić ruch względny poprzez obserwację ruchu ciał znajdujących się poza układem. Wydaje się oczywiste, prawda? Na przykład, jeśli w jednym układzie wybuchła bomba, to musi ona również wybuchnąć w dowolnym (w szczególności inercjalnym) układzie poruszającym się. Inaczej moglibyśmy odróżnić od siebie rozważane układy w sposób absolutny. Zasada, która mówi, że nie istnieje żaden wyróżniony układ inercjalny nazywa się ją *zasadą względności* lub *zasadą demokracji* układów inercjalnych. Wkrótce przekonamy się, że mimo pozornej trywialności tego „faktu”, płyną z niego bardzo ważne i nietrywialne wnioski.

Pytania

- Czy w czterowymiarowej przestrzeni można zdefiniować pojęcie „obrotu wokół osi”? Jeśli tak – podaj definicję, jeśli nie – podaj przyczynę.
- Czy mogą istnieć nieliniowe transformacje zachowujące stałość prędkości światła we wszystkich układach inercjalnych?
- Czym można uzasadnić wprowadzenie nowego pojęcia czasoprzestrzeni?
- Jaka jest interpretacja geometryczna transformacji Lorentza?
- Czy i kiedy złożenie dwóch transformacji Lorentza jest przemienne?
- Czy złożenie transformacji Lorentza dla ruchu z prędkością V i transformacji dla ruchu z prędkością $-V$ wzdłuż tego samego kierunku jest identycznością?
- Jak uściślić powszechnie używane sformułowanie mówiące, że nic nie może poruszać się szybciej od światła?
- Jaką rolę w szczególnej teorii względności odgrywa interwał czasoprzestrzenny?
- Dlaczego na rysunku 1.5 rzutowanie zdarzeń na oś czasu dokonywane jest wzdłuż osi przestrzennej, a nie prostopadle do osi czasu?
- Czy można wyprowadzić postać transformacji Lorentza współrzędnej czasowej z transformacji współrzędnych przestrzennych?

Zadania

- Podaj transformację Lorentza do układu odniesienia poruszającego się z prędkością V wzdłuż prostej leżącej w płaszczyźnie xy i nachylonej pod kątem 45° do osi x . W chwili $t = t' = 0$ początki obu układów inercjalnych pokrywały się. Przyjmij, że układy spoczywający i poruszający się mają równoległe osie przestrzenne.
- Do milicjanta stojącego pośrodku skrzyżowania zbliżają się z jednakowymi prędkościami $V = 0.9c$ dwa samochody: jeden od północy, a drugi od wschodu. Ze względu

na awarię sygnalizacji w chwili $t = 0$ dojdzie do zderzenia. Zanim dojdzie do wypadku, pomóż milicjantowi odpowiedzieć na następujące pytania: Z jaką prędkością z punktu widzenia milicjanta zbliżają się do siebie samochody? Z jaką prędkością według jednego z kierowców zbliża się do niego drugi samochód? Czy w którymś z wymienionych przypadków milicjant powinien czuć się zaniepokojony przekroczeniem dozwolonej w obszarze zabudowanym prędkości c ?

- Dla transformacji Galileusza narysuj osie współrzędnych czasoprzestrzennych obserwatora poruszającego się z prędkością V wzdłuż osi x . Uwzględnij jednostki na osiach. Podaj kąty względnego nachylenia osi jako funkcje względnej prędkości.
- Sprawdź, że następująca transformacja:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= \left(1 + \frac{V}{c}\right)x - Vt \end{aligned} \quad (1.18)$$

jest liniowa, jest identycznością dla $V \rightarrow 0$ oraz zachowuje prędkość światła, to znaczy, obiekt poruszający się w nieprimowanym układzie z prędkością c , porusza się z tą samą prędkością w układzie primowanym. Podaj inną transformację posiadającą wymienione własności, różną od transformacji Lorentza. Wyjaśnij, dlaczego powyższa transformacja nie pojawiła się w naszych rozważaniach jako alternatywa dla transformacji Lorentza.

- Na wiele lat przed powstaniem teorii względności, Lorentz w oparciu o analizę równań Maxwella podał następującą transformację współrzędnych, która zachowuje równania elektrodynamiki przy zmianie układu odniesienia:

$$\begin{aligned} t' &= t - Vx/c^2 \\ x' &= x - Vt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Wkrótce potem Poincaré wprowadził do tych transformacji poprawkę prowadzącą do wzorów (1.8). Zbadaj własności transformacji podanych przez Lorentza, sprawdź, czy spełniają one warunki postawione w trakcie rozważań z niniejszego rozdziału i postaraj się odgadnąć, czym kierował się Poincaré korygując wzory Lorentza.

- W rozważaniach prowadzących do transformacji Lorentza nie przedyskutowaliśmy odbicia współrzędnych przez dowolną prostą leżącą w płaszczyźnie zawierającej współrzedną czasową i przestrzenną. Zbadaj tę ewentualność i wyznacz wszystkie transformacje, do których ona prowadzi.

Rozdział 2

JAK POWIEDZIAŁO SIĘ A, TRZEBA POWIEDZIEĆ A_t

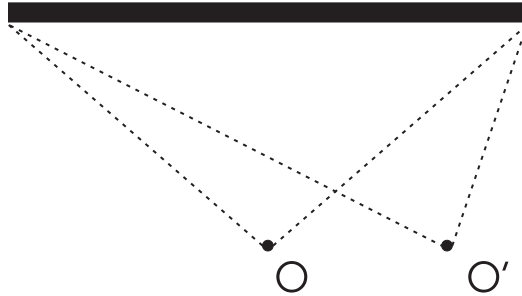
Pisząc Stefanem Kisielewskim: w szczególnej teorii względności bohatersko pokonuje się trudności nieznane w fizyce nierelatywistycznej. Już sama kinematyka relatywistyczna obfituje w całą masę paradoksów, które w wersji newtonowskiej w ogóle nie występują. Jednakże wszystkie te absurdy okazują się jedynie pozorne i co najwyżej mogą trochę uwierać nasze poczucie zdrowego rozsądku. Nie ma w nich niczego nielogicznego. W sensie logicznym teoria względności jest wręcz zadziwiająco spójna. Niniejszy rozdział pozwoli się nam o tym przekonać.

2.1 WIELOZNACZNA JEDNOCZESNOŚĆ

Dwa jednoczesne zdarzenia zachodzące w różnych punktach przestrzeni (na przykład jednoczesne tupnięcie dwoma butami) są oddzielone interwałem przestrzennym. Wiemy, że takie zdarzenia nie mogą być połączone ciągiem przyczynowo skutkowym, bo mogłby połączyć je jedynie sygnał poruszający się nieskończenie szybko. Wiemy również, że w każdym innym układzie odniesienia interwał będzie również przestrzenny. Jednakże ze zmianą układu odniesienia wiąże się niezwykle konsekwencja: jeżeli zdarzenia są jednoczesne w jednym układzie, to w większości innych, poruszających się względem niego inercjalnych układów, zdarzenia te nie będą jednoczesne! Sprawdźmy, że jest tak w rzeczywistości. Rozważmy dwa jednoczesne ($\Delta t = 0$) zdarzenia oddalone o Δx . W układzie poruszającym się z prędkością $V \neq 0$ odstęp czasu pomiędzy nimi odczytujemy ze wzorów (1.8):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{-V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \neq 0. \quad (2.1)$$

Oznacza to, że osoba przejeżdżająca w pobliżu pociągiem zaobserwuje, że najpierw tupnął lewy, a potem prawy but (lub odwrotnie). Jak to możliwe? Przypomnijmy sobie, że przejście do poruszającego się układu współrzędnych oznacza obserwację zjawisk z układu hiperbolicznie obróconego w czasoprzestrzeni. Na tej samej zasadzie dwa końce kija mogą być od jednego obserwatora równooddalone, ale od drugiego, patrzącego z boku, każdy koniec znajdzie się w innej odległości – rysunek 2.1. Widać stąd, że zadawanie pytania



Rysunek 2.1: Dwa końce kija znajdują się w jednakowych bądź różnych odległościach w zależności od obserwatora. Na tej samej zasadzie dwa zdarzenia zachodzące jednocześnie dla jednego obserwatora nie muszą być jednocześnie dla innego.

„czy zdarzenia są naprawdę równoczesne, czy nie?” nie ma sensu. Podobnie bezsensowne jest zadawanie pytania czy końce kija są „naprawdę” równooddalone. Oczywiście zależy od kogo. Nie istnieje bezwzględne równooddalenie podobnie jak nie istnieje bezwzględna równoczesność.

2.2 DYLATACJA CZASU

Obserwator patrzący na kij pod kątem może uznać, że kij jest krótszy, a patrząc zupełnie z boku może wręcz stwierdzić, że długość kija wynosi niemal zero. Czy podobnemu efektowi podlega upływ czasu? Okazuje się, że tempo upływu czasu w różnych układach inercjalnych jest rzeczywiście różne. Aby to stwierdzić musimy przeanalizować wskazania zegara umieszczonego nieruchomo w jednym z układów z punktu widzenia drugiego układu.

Rozważmy zegar umieszczony w początku $x' = 0$ układu inercjalnego poruszającego się z prędkością V . Zegar odmierzył odstęp czasu $\Delta t'$ pomiędzy pewnymi dwoma zdarzeniami. Sprawdźmy ile czasu Δt upłynęło między tymi zdarzeniami w układzie spoczywającym. Z transformacji (1.9) znajdujemy:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (2.2)$$

czyli $\Delta t' < \Delta t$. Zatem według obserwatora nieruchomego czas w poruszającym się układzie płynie wolniej, co nazywamy *dylatacją czasu*. Chodź wygląda to dziwnie, taki sam wniosek musi wyciągnąć obserwator primowany na temat upływu czasu w układzie nieprimowanym. Ten pozornie paradoksalny fakt zostanie w szczegółach omówiony dalej.

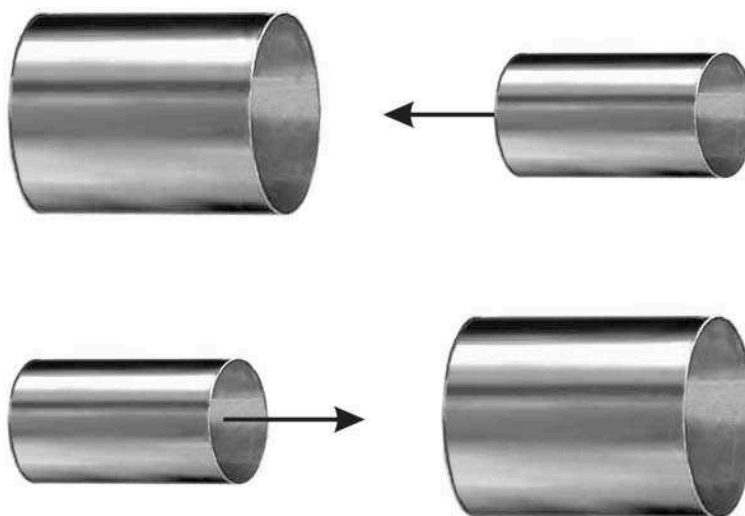
2.3 SKRÓCENIE LORENTZA

Podobnym do spowolnienia upływu czasu zjawiskiem jest skrócenie poruszających się obiektów w kierunku ruchu, zwane *skróceniem Lorentza*. Jeżeli udało nam się przełknąć geometryczną interpretację zmiany układu odniesienia, spowolnienie upływu czasu, skrócenie obiektów w ruchu nie powinno nas już dziwić. Ilościowa analiza tego skrócenia jest podobna do rozumowania z poprzedniego podrozdziału. Wyobraźmy sobie kij o długości $\Delta x'$, spoczywający wzdłuż osi x' w primowanym układzie. Jak wygląda kij z punktu widzenia układu nieprimowanego (względem którego poprzedni układ porusza się tradycyjnie z prędkością V wzdłuż osi x)? To znaczy, ile wynosi w tym układzie długość kija Δx ? Znajdujemy ją bez problemu ponownie korzystając z transformacji (1.8). W tym celu musimy obliczyć różnicę współrzędnych Δx w tej samej chwili w układzie nieprimowanym, więc bierzemy $\Delta t = 0$:

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2.3)$$

Jest to właśnie słynne skrócenie Lorentza: im szybciej porusza się kij, tudzież dowolny inny ruchomy obiekt, tym staje się krótszy. Chcielibyśmy jeszcze raz wyraźnie podkreślić, dlaczego korzystaliśmy z transformacji (1.8), a nie z transformacji odwrotnej (1.9). Gdybyśmy skorzystali z tej drugiej biorąc $\Delta t' = 0$, otrzymalibyśmy w wyniku raczej wydłużenie, niż

skrócenie Lorentza. Otóż jest rzeczą niezwykle istotną, że mierząc w wybranym układzie odniesienia jakąś długość, czyli różnicę współrzędnych dwóch punktów, musimy zawsze obliczać odejmowane współrzędne w tej samej chwili czasu. Jeżeli mierzylibyśmy położenie końców poruszającego się kija w różnych chwilach, kij w międzyczasie zdążyłby się trochę przesunąć zafałszowując wyniki naszych pomiarów. Dlatego właśnie musimy koniecznie przyjąć, że położenie obu końców obliczamy (lub mierzymy) jednocześnie, czyli $\Delta t = 0$, a nie $\Delta t' = 0$. Ponieważ z początku rozdziału wiemy, że pojęcie jednoczesności zależy od układu odniesienia, oba podejścia nie są równoważne.



Rysunek 2.2: Ruch względny dwóch rur z hipotetycznym skróceniem poprzecznym. Widok z dwóch układów odniesienia.

Skrócenie o którym mówiliśmy jest skróceniem *w kierunku ruchu*. Czy możliwe jest również skrócenie w kierunku poprzecznym do kierunku ruchu? Załóżmy, że jest ono możliwe i przeanalizujemy następujący eksperyment myślowy – rysunek 2.2. Rozważmy dwie identyczne, współosiowe rury zbliżające się do siebie wzdłuż wspólnej osi symetrii. Jeżeli podczas szybkiego ruchu obiekty doznają skrócenia w kierunku poprzecznym do prędkości, to w układzie związanym z każdą z rur, druga będzie zawsze węższa i przy odpowiednio dużej prędkości może przelecieć na wylot. Jest jasne, że to, która rura przeleci wewnątrz drugiej zależy od punktu widzenia. Zatem, jeśli jedną z rur zastąpimy wypełnionym w środku walcem, to w jednym układzie inercyjnym ciała bezpiecznie się miną, a w drugim dojdzie do zderzenia. Przykład ten ilustruje niespójność skrócenia poprzecznego z zasadą względności. Dlatego też przyjęliśmy podczas wyprowadzania wzorów transformacyjnych

$$y' = y \text{ oraz } z' = z.$$

2.4 PARADOKS TUNELU WZDŁUŻ WISŁY

Ze skróceniem Lorentza wiąże się wiele paradoksów. Naturalnie owe rzekome sprzeczności okazują się być pozorne i, w przeciwieństwie do problemów związanych ze skróceniem poprzecznym, po krótkim namyśle można wskazać przyczynę zamieszania i rozwiązać paradoks.

W Warszawie wybudowano jedyny na świecie tunel biegnący wzdłuż rzeki. Ale to dopiero początek paradoksu. Wyobraźmy sobie, że bardzo długa ciężarówka ma akurat taką długość, że gdyby ją w tym tunelu zatrzymać, to ze wszystkimi swoimi przyczepami wypełniłaby idealnie jego długość. Wyobraźmy sobie następnie, że ciężarówkę tę rozpędziliśmy do tak dużej prędkości, że obserwator stojący w pobliżu stwierdza ze zdziwieniem, że ciężarówka mknąc pod ziemią zajmuje jedynie połowę długości tunelu. Należy tu nadmienić, że zachowanie kierowcy łamiącego obowiązujące w terenie zabudowanym ograniczenie prędkości niniejszym potępiamy. Jednakże z punktu widzenia kierowcy to tunel ulega skróceniu i w żadnej chwili ciężarówka nie znajduje się w całości wewnątrz tunelu. Przeciwnie, według niego połowa ciężarówki wystaje z tunelu, podczas gdy reszta w całości go wypełnia. Jak to możliwe?

Pozorna sprzeczność wynika z tego, że w problemie pojawia się tylnymi drzwiami pojęcie jednoczesności. Mówiąc, że w pewnej chwili ciężarówka znajduje się wewnątrz tunelu stwierdzamy, że jej przednia szyba znajduje się w nim *jednocześnie* z tyłem ostatniej przyczepy. Naturalnie, chwile, w których mierzono w tunelu położenie przedniej szyby i ostatniej przyczepy nie są wcale jednoczesne według kierowcy. Według niego położenie przedniej szyby zostało zmierzone najpierw, a w chwilę później, gdy ciężarówka zdążyła kawałek przejechać, zmierzono położenie ostatniej przyczepy i *vice versa*. Przykład ten powinien nauczyć nas ostrożnego przyglądania się wszelkim paradoksom teorii względności. Powinniśmy być szczególnie czujni, czy gdzieś nie pojawia się właśnie zdradliwa jednoczesność.

2.5 CZY SKRÓCENIE LORENTZA JEST RZECZYWISTE?

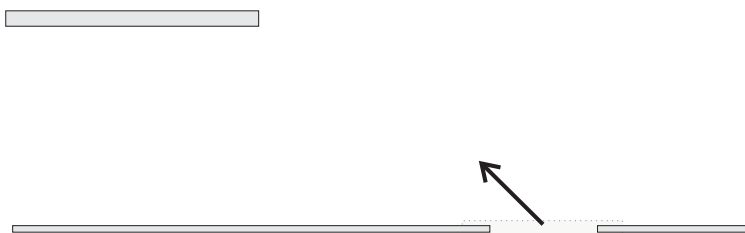
Stawimy teraz czoła następującemu ważnemu pytaniu: czy skrócenie Lorentza jest rzeczywiste, czy też jest jedynie czymś pozornym, matematyczną ciekawostką nie mającą

związku z rzeczywistością? Musimy być udzielonej odpowiedzi absolutnie pewni, bowiem tylko wówczas mamy szansę dobrze zrozumieć relatywistyczny charakter rzeczywistości. Pewność ta powinna nam towarzyszyć od samego początku, gdy analizowaliśmy relatywistyczne transformacje zmiany układu odniesienia. Rzeczy te są jednak dla nas wciąż nowe i stąd konieczność oswojenia się z nimi (czemu zresztą służyć mają również kolejne rozdziały).



Rysunek 2.3: Poruszający się poziomo pręt oraz poruszającą się pionowo bariera z otworem. Kropkowaną linią zaznaczono kształty spoczynkowe. Położenia i prędkości dobrane są w taki sposób, aby skrócony pręt przeleciał przez otwór w barierze unikając zderzenia.

Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 2.3. Mamy tam poruszający się poziomo pręt oraz poruszającą się pionowo barierę z otworem. Położenia i prędkości obiektów możemy dobrać w taki sposób, aby, o ile skrócenie Lorentza jest rzeczywiste, pręt przeleciał przez otwór w barierze bez zderzenia. Gdyby jednak skrócenie było jedynie matematycznym trickiem, musiałoby dojść do kolizji. Szekspirowski dylemat, który przed nami stoi, brzmi: przeleci, czy nie przeleci? – oto jest pytanie!

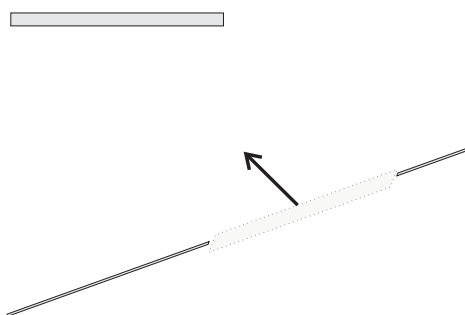


Rysunek 2.4: Ta sama sytuacja w układzie spoczynkowym pręta.

Przede wszystkim ktoś z Was mógłby zauważyć co następuje. Przejdźmy do układu odniesienia w którym pręt spoczywa, a bariera porusza się ukośnie. Ponieważ bariera ma teraz dodatkową poziomą składową prędkości, musi pojawić się dodatkowe poziome skrócenie –

rysunek 2.4. Zatem widzimy, że niezależnie, czy skrócenie jest, czy go nie ma – musi dojść do zderzenia! Czyli, rozumując dalej, stosujemy zasadę względności – i także w pierwszym układzie odniesienia zderzenie musi nastąpić, czyli skrócenie wcale nie jest rzeczywiste.

Ale czy nasza penetracja intelektualna nie jest aby zbyt płytka? Otóż popełniliśmy poważny błąd. Rysunek 2.4 i przedstawione rozumowanie są niepoprawne. Właściwa wersja wydarzeń w drugim układzie odniesienia przedstawiona jest na rysunku 2.5. Musimy przecież pamiętać, że skrócenie jest zawsze i wyłącznie w kierunku ruchu! Nie możemy uzyskać poprawnego skrócenia dokonując go wzdłuż kierunku jednej składowej prędkości, a następnie wzdłuż kierunku drugiej składowej. Tak właśnie uczyniliśmy na rysunku 2.4, na którym widać gołym okiem, że skrócenie nie zachodzi wzdłuż kierunku prędkości, czyli przedstawione jest źle. Jednak na rysunku 2.5 jest już wszystko w porządku – skrócenie jest, tak jak powinno, wzdłuż kierunku prędkości. Widzimy, że skrócenie Lorentza wymaga, by bariera z otworem się obróciła.



Rysunek 2.5: Ta sama sytuacja w układzie spoczynkowym pręta – tym razem wersja poprawna.

Widzimy ponadto, że także w tym układzie losy klocka zależą od tego czy skrócenie jest rzeczywiste czy nie! Jeśli jest – zderzenia nie będzie w żadnym z układów, jak tego żąda zasada względności. Jeżeli nie jest, zderzenie będzie (także w obu układach). Zatem nic nie stoi na przeszkodzie, by twierdzić, że skrócenie Lorentza jak najbardziej rzeczywiste i pręt w obydwu układach przeleci przez otwór na wylot. Pokazaliśmy, że w rozważanym przypadku zjawisko skrócenia Lorentza jest wewnętrznie spójne.

Pójdźmy teraz o krok dalej. Przyjmijmy, że dylatacja czasu jest zjawiskiem jak najbardziej realnym. Zatem jeśli poruszamy się bardzo szybko, z prędkością V względem gleby, a mamy do przejścia określoną (w układzie gleby) odległość, na przykład dwa ryczenia

wołu* pomiędzy wsią A i wsią B, to z punktu widzenia krowy stojącej na miedzy, czas, który upłynie na naszym zegarku na odcinku $|AB|$ nie jest wcale równy $\frac{|AB|}{V}$. Czas, który mija na naszym zegarku skraca się w wyniku dylatacji czasu wynosząc zdaniem krowy $\frac{|AB|}{V}\sqrt{1-V^2/c^2}$ (natomiast na zegarku krowy czas, który minie w naszej podróży równy jest oczywiście $\frac{|AB|}{V}$). A w jaki sposób my wyjaśnimy fakt, że przebywając odległość dwóch ryczeń wołu potrzebujemy do tego mniej czasu, niż wynikałoby to z założeń fizyki galileuszowej? Otóż wyjaśnić to można tylko w jeden sposób: w naszym, ruchomym układzie, droga pod naszymi stopami się skraca (gdyż według nas to gleba się porusza) i dlatego dystans pomiędzy wsiami przebywamy szybciej. Zatem ten sam efekt, z punktu widzenia dwóch różnych obserwatorów ma różne wyjaśnienia, ale prowadzące do spójnego wyniku. Ilościowo wszystko również się zgadza, bo odległość, którą mamy do przebycia skraca się o dokładnie ten sam czynnik Lorentza $\sqrt{1-V^2/c^2}$, który występuje w dylatacji czasu, zatem zgadzamy się z krową co do czasu, jaki zajmie nam przejście od A do B. Oznacza to, że jeśli wierzymy w realność dylatacji czasu, to musimy uwierzyć także w realność skrócenia Lorentza. Tak długo, jak będziemy błędzić w niepewności, rojąc sobie nadzieje, że skrócenie Lorentza jest może tylko pozorną iluzją, omówionego problemu nie rozwiążemy. Tylko postawienie sprawy jasno: poruszające się obiekty są realnie krótsze, pozwala uniknąć sprzeczności. Jeśli zatem do tej pory tkwiliśmy w myślowym efekcie Placebo oczekując, że konsekwencje teorii względności, to tylko jakaś ulotna fatamorgana, to pora się wreszcie ocknąć. Zresztą powiedzmy sobie jasno, że cała nasza gadanina ma tylko oswoić nas z wnioskami, które w sposób jednoznaczny płynęły już z rozważań z pierwszego rozdziału. Jeśli teraz powrócimy do nich, by raz jeszcze je gruntownie przemyśleć, powinniśmy się przekonać, że nie ma innej drogi, jak odrzucić nasze zdroworozsądkowe, naiwne oczekiwania wynikające z codziennego doświadczenia.

Wszystko to przy założeniu, że dylatacja czasu jest zjawiskiem realnym. Teraz zaś przekonamy się, że zjawisko skrócenia Lorentza musi być rzeczywiste bez odwoływania się do dylatacji czasu. Zresztą sami zobaczymy.

2.6 ELEKTRYZUJĄCY PARADOKS ELEKTRYCZNY

Zajmiemy się jednym z paradoksów związanych z teorią elektromagnetyzmu, którego fi-

*jedno ryczenie wołu, to oczywiście jednostka odległości zdefiniowana jako maksymalny dystans, z jakiego słycać ryczącego wołu

zycy nie potrafili rozwiązać przez bardzo wiele lat. Problem ten znany był na długo przed powstaniem teorii względności, biedziły się nad nim najtęższe głowy i można wręcz powiedzieć, że to właśnie on doprowadził do powstania teorii względności. Bowiem dopiero ona dała możliwość rozwiązania paradoksu. A oto jak się sprawy mają.

Rozważmy nienaładowany, prostoliniowy przewód elektryczny, przez który płynie prąd. Z mikroskopowego punktu widzenia prąd jest ruchem ujemnych elektronów z pewną średnią wypadkową prędkością V na tle dodatnich, nieruchomych jonów sieci krystalicznej przewodnika. Natężenie tego prądu wynosi $I = e\rho_-VS$, gdzie ρ_- jest gęstością elektronów w przewodniku (których ładunek jest równoważony przeciwnym ładunkiem jonów sieci), a S polem przekroju drutu. Wyobraźmy sobie, że w odległości r od przewodu, równoległe do niego porusza się z tą samą prędkością V swobodny elektron – rysunek 2.6 A). Ponieważ ruch ładunków wewnątrz przewodnika wytwarza na zewnątrz pole magnetyczne $B = I/2\pi\epsilon_0c^2r$, w którym porusza się elektron, pojawi się działająca na niego siła F skierowana ku przewodnikowi:

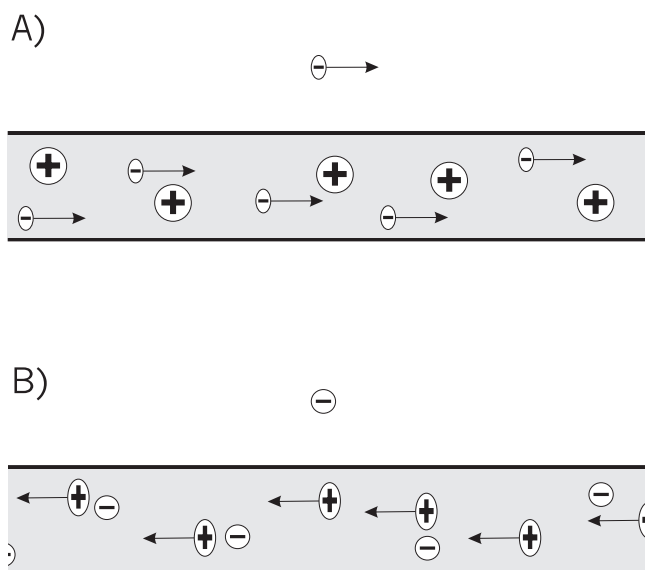
$$F = eVB = \frac{eVI}{2\pi\epsilon_0c^2r} = \frac{e^2\rho_-SV^2}{2\pi\epsilon_0c^2r}. \quad (2.4)$$

Siła ta spowoduje, że zewnętrzny elektron zacznie się zbliżać do przewodu z prądem.

Kłopot pojawi się w momencie, gdy rozważymy tę samą sytuację w (primowanym) inercjalnym układzie odniesienia poruszającym się razem z elektronami – rysunek 2.6 B). Wówczas prąd elektronowy wynosi zero, ale pojawia się analogiczny prąd pochodzący od dodatnich jonów sieci poruszających się w przeciwnym kierunku. Prąd ten naturalnie również wytwarza pole magnetyczne. Kłopot w tym, że teraz zewnętrzny elektron nie porusza się już w tym polu, lecz spoczywa i dlatego nie działa na niego żadna magnetyczna siła! Jak temu zaradzić?

Widać, że problem leży głęboko, bo we wzorze na *siłę Lorentza*: $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Występuje w nim prędkość $\mathbf{v}$ ładunku q w polu magnetycznym $\mathbf{B}$. Ale co to za prędkość? Prędkość względem czego? Przecież możemy przejść do układu w którym ładunek spoczywa – i co wtedy? Siła przestanie działać?

Powróćmy raz jeszcze do układu nieprimowanego i rozważmy fragment przewodu elektrycznego o długości L . Całkowity ładunek zawarty wewnątrz tego fragmentu pochodzi częściowo od elektronów Q_- , a częściowo od dodatnich jonów Q_+ , w sumie wynosząc $0 = Q_- + Q_+ = -eSL\rho_- + eS\rho_+$ (przewodnik jest nienaładowany). Wynika stąd oczywi-



Rysunek 2.6: Ruch swobodnego ładunku w pobliżu przewodnika z prądem widziany w dwóch układach inercjalnych. Skrócenie Lorentza zostało celowo wyolbrzymione. W rzeczywistości wypadkowa prędkość elektronów w przewodzie elektrycznym jest rzędu centymetrów na minutę.

sty wniosek, że gęstość elektronów ρ_- w przewodzie równa jest gęstości jonów ρ_+ . Co się stanie gdy przejdziemy do układu poruszającego się? Przede wszystkim musimy stanowczo stwierdzić, że ładunek elementarny e nie zależy od prędkości niosącej go cząstki. Gdyby e zmieniał się wraz prędkością, to podgrzewane ciała ładowałyby się elektrycznie, bo część ciepła przekazywana jest swobodnym, lekkim elektronom, a część ciężkim jonom sieci. W związku z różnicą mas, elektrony nabierają o wiele większej prędkości niż jony i dlatego każda, choćby najmniejsza zależność e od prędkości spowodowałaby powstanie nadwyżki (lub zmniejszenia) ujemnego ładunku wewnątrz ciała, co byłoby łatwe do zaobserwowania, a obserwowane nie jest.

Skoro zatem całkowita wartość ujemnego ładunku elektronowego nie ulega zmianie (podobnie jak wartość dodatniego ładunku jonowego), to może zmienia się jego gęstość? Zgodnie z przewidywaniami transformacji Lorentza, dowolnie wybrany odcinek zawierający poruszające się elektrony zmienia swoją długość przy zmianie układu odniesienia z L na $L/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, za co odpowiada skrócenie Lorentza. Zatem przy ustalonej wartości ładunku, musi zmieniać się gęstość elektronów (ta sama ilość elektronów znajduje się teraz w dłuższym odcinku drutu)! Z równości ładunków elektronowych zgromadzonych

w ustalonym fragmencie przewodu $Q'_- = Q_-$ oraz wzoru opisującego skrócenie Lorentza znajdujemy:

$$\varrho'_- = \varrho_- \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2.5)$$

Analizując w podobny sposób ładunki pochodzące od jonów sieci otrzymujemy:

$$\varrho'_+ = \frac{\varrho_+}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Wypadkowa gęstość ładunku zgromadzona w przewodniku w primowanym układzie odniesienia wynosi $e\varrho' = -e\varrho'_- + e\varrho'_+ > 0$. Oznacza to, że przewodnik w tym układzie jest naładowany dodatnio i będzie przyciągał zewnętrzny elektron siłą elektryczną! Wszystko się zatem zgadza, przynajmniej jakościowo. W obydwu układach odniesienia sytuacja będzie identyczna: ładunek będzie przyciągany przez przewodnik z prądem. Jednak przyczyną przyciągania w jednym układzie jest pole magnetyczne, a w drugim pole elektryczne. W dalszej części przekonamy się, że w teorii względności nie da się nigdy oddzielić jednego pola od drugiego, bo wartości tych pól zależą od układu odniesienia. Natomiast efekt końcowy – wpływ na ruch cząstek naładowanych musi być we wszystkich układach odniesienia równoważny.

Sprawdźmy, że jest tak w rzeczywistości i przeanalizujmy ilościowo przyciąganie zewnętrznego elektronu przez przewodnik w układzie primowanym. W tym układzie gęstość ładunku w przewodniku wynosi:

$$e\varrho' = -e\varrho'_- + e\varrho'_+ = \frac{e\varrho_- V^2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.7)$$

Pole elektryczne pochodzące od tej gęstości wynosi:

$$E = \frac{e\varrho' S}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.8)$$

Zatem siła elektryczna F' , z jaką zewnętrzny ładunek jest przyciągany przez przewodnik w układzie primowanym wynosi:

$$F' = \frac{e^2 \varrho_- S V^2}{2\pi \varepsilon_0 c^2 r \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.9)$$

Widać, że siły F i F' w obu układach są prawie identyczne. Wzory (2.4) oraz (2.9) różnią się bowiem tylko o niewielki czynnik $\sqrt{1 - V^2/c^2}$, ale prawie robi sporą różnicę. Jest dobrze, ale nie beznadziejnie. Należy bowiem pamiętać, że najważniejsze jest, ażeby w obu układach siły te wywoływały jednakowy efekt, to znaczy taką samą zmianę pędu swobodnego elektronu. Poprawne relatywistycznie *II prawo Newtona* jest postaci:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.10)$$

o czym będzie mowa w kolejnych rozdziałach. Oczekujemy, że pęd uzyskany przez elektron w krótkim czasie Δt w układzie nieprimowanym oraz odpowiadającym mu czasie $\Delta t'$ w układzie primowanym będzie taki sam, czyli musi zachodzić $F\Delta t = F'\Delta t'$. Stąd natychmiast wynika, że $F = F'\sqrt{1 - V^2/c^2}$, czyli wszystko się zgadza.

Zwróćmy teraz uwagę, że przedstawiony problem można rozwiązać wyłącznie stosując relatywistyczne prawa, zgodnie z którymi poruszające się ciała naprawdę się skracają. Rozwiązanie paradoksu omówionego powyżej powinno uświadomić nam również inną, bardzo ważną rzecz: teoria elektromagnetyzmu Maxwella jest teorią relatywistyczną (z czego Maxwell nie mógł sobie, rzecz jasna, zdawać sprawy). Oznacza to, że równań Maxwella nie trzeba będzie modyfikować by otrzymać wersję relatywistyczną. Równania takie, jak je znamy są już relatywistycznie niezmiennicze. Zagadnieniom elektromagnetycznym i ich związkowi z teorią względności zostanie poświęcony jeden z dalszych, obszernych rozdziałów.

2.7 PARADOKS BLIŹNIĄT

Omówimy teraz słynny paradoks bliźniąt. Brzmi on następująco: dwaj bracia bliźniacy, Paweł i Gaweł udali się na stację kosmiczną. Paweł wsiadł do rakiety i odbył długą podróż, po czym powrócił na Ziemię. Z punktu widzenia Gawła, pozostającego cały czas na Ziemi, upływ czasu w rakiecie był spowolniony wskutek dylatacji czasu (rakietę cały czas poruszała się z pewną prędkością). Dlatego Paweł w trakcie podróży powinien zestarzeć

się mniej niż Gaweł pozostający „w tym samym czasie” na Ziemi. Jeżeli Gaweł czekał na brata czas T (według wskazań swojego zegarka), to według niego podczas całej podróży kosmicznej Pawła aż do momentu jego powrotu, upływ czasu, zwany *czasem własnym* τ w rakiecie powinien wynosić:

$$\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt < T, \quad (2.11)$$

gdzie $v(t)$ jest zmienną w czasie prędkością rakiety. Zatem po powrocie bracia powinni być już w różnym wieku. Ktoś mógłby tu spostrzec pewien pozorny paradoks: przecież z punktu widzenia Pawła, to Gaweł cały czas się poruszał i to Paweł po powrocie powinien być młodszy. Błąd w tym rozumowaniu polega na tym, że układ Pawła nie jest inercjalny (bo rakietę musi poruszać się z przyspieszeniem) i dlatego relatywistyczne wzory, które dotychczas wyprowadzaliśmy i stosowaliśmy nie są w tym układzie poprawne. Sytuacja z punktu widzenia Pawła, który porusza się ze zmienną prędkością zostanie w szczegółach omówiona w jednym z dalszych rozdziałów. Już teraz możemy jednak zdradzić, że w jego nieinercjalnym układzie dzieją się rzeczy zaskakujące.

W oparciu o paradoks bliźniąt wykonywane były pewne ciekawe eksperymenty. Na przykład jeden z dwóch zsynchronizowanych zegarów atomowych umieszczano w ponaddźwiękowym samolocie, który odbywał długą podróż, po czym wracał w miejsce startu. Okazywało się wówczas, że zegar, który odbył podróż nieznacznie się późnił w stosunku do zegara, który cały czas pozostawał nieruchomy. Zaobserwowane odstępstwo zgadzało się zresztą idealnie ze wzorem (2.11).

Na koniec musimy uczynić jeszcze jedną ważną uwagę. Bez mrugnięcia przełknęliśmy wzór (2.11) opisujący upływ czasu na poruszającym się wewnątrz rakiety zegarze. Wzór ten można rozumieć następująco: w chwili t rakietę porusza się z chwilową prędkością $v(t)$, która przez infinitezymalny czas dt nie zdąży się zmienić o skończoną wartość. Wiemy zaś, że gdyby ze stałą prędkością $v(t)$ poruszał się zegar umieszczony w inercjalnym układzie odniesienia, to z punktu widzenia obserwatora spoczywającego, który odmierzył czas dt poruszający się zegar zestarzałby się o $\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}dt$. Pisząc wzór (2.11) zakładamy, że tempo zegara poruszającego się ze zmienną prędkością zależy tylko od jego chwilowej prędkości, a nie zależy od przyspieszenia, ani wyższych pochodnych. Jest to bardzo ważne założenie i nazywa się je czasem *postulatem zegara*. Założenie to pozwala analizować ruch po skomplikowanej krzywej jako sumę ruchów po bardzo krótkich odcinkach ze

stałą prędkością na każdym z nich. Na tym fundamentalnym postulacie zbudowana jest, jak przekonamy się później, relatywistyczna teoria grawitacji, zwana *ogólną teorią względności*. Jaką mamy pewność, że postulat zegara jest spełniony? Z jakiego fundamentalnego prawa to wynika? No cóż, nie mamy takiej pewności. Co prawda, postulat ten sprawdzony był w eksperymentach z przyspieszeniami, sięgającymi $10^{18}g$ i nawet wówczas nie stwierdzono wpływu przyspieszenia na upływ czasu. Ale, jak wiadomo, nigdy nic nie wiadomo.

2.8 ZAKAZ OGLĄDANIA PLECÓW

W znanej opowieści o cieniach zamieszkujących pewną planetę i nie znających pojęcia góra-dół, niewielka osada cieni odgradzona od świata murem z cienia zaczęła się rozrastać na skutek wyżu demograficznego. Cienie chcąc powiększyć terytorium burzyły zbudowany mur i w jego miejsce budowały nowy, okalający większe obszary. Za każdym razem, gdy do tego dochodziło, trzeba było przygotować więcej cieniowych cegieł, bo nowy mur zawsze był dłuższy od starego. Pewnego razu okazało się jednak, że po zajęciu nowych zakątków królestwa i zbudowaniu nowego muru, wcale nie zużyto większej ilości cegieł. Nikt nie potrafił tego wówczas wyjaśnić, a wśród cieni rozeszła się plotka o złym czarze, który został na nie rzucony. Późniejszy bieg zdarzeń stawał się coraz dziwniejszy: gdy ponownie rozszerzono granice królestwa i postawiono nowy mur, zostało całkiem sporo niewykorzystanych cegieł. Wciąż nie było wyjaśnienia. Sytuacja powtarzała się wielokrotnie, aż wreszcie, w najbardziej zaskakującym wydarzeniu w historii planety, podróżnicy, którzy wyruszyli na podbój północy spotkali się z badaczami południa, którzy nadeszli z naprzeciwka. Cienie jeszcze przez wiele lat nie odkryły trzeciego wymiaru, i tego, że ich planeta jest w rzeczywistości kulista.

Zastanówmy się, czy możliwe jest, żeby czasoprzestrzeń, w której żyjemy posiadała *periodyczne warunki brzegowe*? Czy poruszając się w pewnym wybranym kierunku odpowiednio długo, możliwy jest powrót do punktu wyjścia z przeciwnej strony? Gdyby układ, w którym odbywałby się periodycznie ruch był inercjalny, to sytuacja taka przeczyłaby zasadzie względności. Wyobraźmy sobie bowiem dwóch inercjalnych obserwatorów poruszających się wspólnie wzdłuż tej samej prostej, lecz w przeciwnych kierunkach. Jeśli w chwili startu ze wspólnego punktu zegary obu obserwatorów zostały zsynchronizowane, to w momencie ponownego spotkania powinny one również wskazywać jednakowy czas, co wynika z symetrii zagadnienia. Jednakże z punktu widzenia każdego z obserwatorów, ten

drugi powinien podlegać dylatacji czasu i każdy z nich powinien oczekiwać, że to właśnie on okaże się starszy w chwili ponownego spotkania. Byłby to prawdziwy paradoks bliźniąt. Zatem jeśli w przyrodzie obowiązuje zasada względności, to albo czasoprzestrzeń nie spełnia okresowych warunków brzegowych i choćbyśmy nie wiem jak mocno wyteżali wzrok, to nigdy nie dostrzeżemy w oddali swoich pleców, albo ze względu na tajemnicze *zakrzywienie czasoprzestrzeni* w skali kosmicznej nie istnieją układy inercyjne.

2.9 PARADOKS ROBERTA KORZENIOWSKIEGO

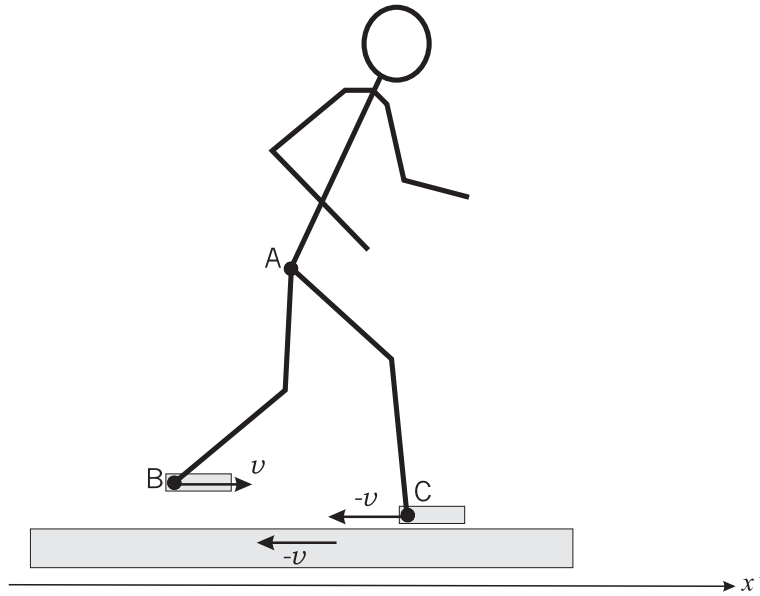
W tym podrozdziale będziemy mieli nareszcie okazję przeciwżyć w nieco bardziej złożonym rachunku nasze nowe wiadomości dotyczące szczególnej teorii względności. Oto kolejny związany z nią paradoks.

Rozważmy bardzo szybki, relatywistyczny chód Roberta Korzeniowskiego. Ponieważ wewnątrz obiektów poruszających się z bardzo dużymi prędkościami czas płynie wolniej dla obserwatorów zewnętrznych, należy się spodziewać, że zegarek na ręce Roberta Korzeniowskiego będzie chodził wolniej. Powolniejsze będzie również bicie jego serca. A co można powiedzieć o ruchu jego nóg? Czy im szybciej będzie szedł tym wolniej poruszać będzie nogami? Czy w granicy prędkości światła wcale nie będzie nimi poruszał? W jaki sposób można chodzić nie ruszając nogami? Jak widać, idąc utartą drogą łatwo się pośliznąć.

Rzeczywiście, z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego, upływ czasu w układzie Roberta Korzeniowskiego (wielkości w tym układzie oznaczać będziemy symbolami z *primem*) jest powolniejszy. Tempo upływu czasu różni się o czynnik $\sqrt{1 - V^2/c^2}$, gdzie V jest prędkością chodu. Nie oznacza to jednak, że można przez tenże czynnik skalować *prędkości* wszystkich ruchów w poruszającym się obiekcie! Prawo spowalniania upływu czasu o podany czynnik dotyczy obiektów nieruchomych (na przykład zegarów) w poruszającym się układzie odniesienia. Działa ono dobrze również dla obiektów poruszających się w układzie *primowanym* powoli. Ponieważ jednak ruch nóg w układzie *primowanym* musi być równie szybki co ruch piechura, musimy dokonać transformacji Lorentza współrzędnych określających położenie nóg oraz środka masy chodźcy niezależnie. W tym celu wprowadzimy najprostszy z możliwych model chodu.

W całym problemie istotny jest ruch jedynie trzech punktów: środka masy A , i położenia dwóch stóp B i C . Rozważmy sytuację z punktu widzenia Roberta Korzeniowskiego (czyli w układzie *primowanym*). Przedstawia ją rysunek 2.7. W tym układzie środek masy A

jest nieruchomy, chodnik porusza się do tyłu z pewną prędkością $-V$, stopa aktualnie dotykająca ziemi C również porusza się z prędkością $-V$, a druga stopa B, przenoszona do przodu, porusza się z prędkością V . Ponieważ zgodnie z przepisami chodu sportowego w każdej chwili czasu conajmniej jedna stopa musi dotykać ziemi, Robert Korzeniowski chcąc iść jak najszybciej, stawia jedną stopę *jednocześnie* odrywając drugą. Powiedzmy, że w chwili $t' = 0$ stopa odrywana znajduje się w punkcie $x'^B = -d$, a stopa stawiana w punkcie $x'_C = d$. Natomiast przez cały czas środek masy A znajduje się w punkcie $x'_A = 0$. Zamiana ról następuje w chwili $t' = \frac{2d}{V}$. Przez następne 20 km ruch jest cyklicznie powtarzany. Pytanie, które nas interesuje, to jak wygląda chód z punktu widzenia obserwatora stojącego



Rysunek 2.7: Prosty model chodu w inercyjnym układzie piechura.

na chodniku (układ nieprimowany), dla którego środek masy Roberta Korzeniowskiego porusza się zgodnie z równaniem $x_A = Vt$. Sprawdźmy najpierw przy pomocy transformacji Lorentza, jak wyglądają czasoprzestrzenne współrzędne opisujące stawianie i odrywanie stóp. Rozpocznijmy od pierwszego tupnięcia: stopa C postawiona zostaje w punkcie $x_C = \frac{d}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, a stopa B oderwana w punkcie $x_B = -\frac{d}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, czyli krok staje się dłuższy. Okazuje się jednak, że stopy są stawiane i odrywane w różnych chwilach: stopa B zostaje oderwana w chwili $t_B = \frac{-dV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ jeszcze zanim zostanie postawiona stopa C, co ma miejsce w chwili $t_C = \frac{dV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ (nawiasem pisząc może to być przyczyną dyskwalifikacji Roberta

Korzeniowskiego, mimo iż ten twierdzi, że stopy zmieniał *jednocześnie*). Rozważmy teraz drugie tupnięcie, w którym stopa B zostaje postawiona w punkcie $x_B = \frac{3d}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, a stopa C oderwana w punkcie $x_C = \frac{d}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, zatem krok jest znowu dłuższy. Odpowiednie chwile odpowiadające tym zdarzeniom to $t_B = \frac{2d/V+dV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ oraz $t_C = \frac{2d/V-dV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. Następnie proces powtarzany jest cyklicznie. Sprawdźmy teraz, że czas oderwania stopy od ziemi wynosi:

$$\Delta t_{\uparrow} = \frac{2d}{V} \frac{1 + \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.12)$$

natomiast czas, w którym druga stopa dotyka ziemi to:

$$\Delta t_{\downarrow} = \frac{2d}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (2.13)$$

Możemy teraz odpowiedzieć już w pełni na pytanie co dzieje się z nogami podczas relatywistycznego chodu według naszego prostego modelu. Czas trwania pełnego cyklu, w którym stopa jest przenoszona, a następnie spoczywa na ziemi wynosi:

$$\Delta t = \Delta t_{\uparrow} + \Delta t_{\downarrow} = \frac{4d/V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.14)$$

i jest dłuższy od czasu $\Delta t' = \frac{4d}{V}$ widzianego przez Roberta Korzeniowskiego. Zatem odpowiedź na pytanie, czy im szybciej idziemy, tym wolniej ruszamy nogami dla zewnętrznego obserwatora jest, paradoksalnie, twierdząca! W granicy $V \rightarrow c$ czas trwania pełnego kroku staje się wręcz nieskończony! Jest i druga ciekawa obserwacja: w tej granicy obie stopy przez większość czasu fruną w powietrzu robiąc ogromne kroki i prawie wcale nie dotykają ziemi.

To ostatnie stwierdzenie staje się wręcz oczywiste, gdy zdamy sobie sprawę, że w układzie Roberta Korzeniowskiego cały zewnętrzny świat (zatem również chodnik) się skraca. I mimo, że długość kroku według Korzeniowskiego jest zwyczajna, to skracanie chodnika powoduje, że każdy krok wiąże się z pokonaniem ogromnego dystansu. Nic więc dziwnego, że z punktu widzenia sędziów kroki piechura stają się nienaturalnie długie. A ponieważ nogi Korzeniowskiego nie mogą się wydłużać, to jedyną możliwością zrealizowania tego scenariusza jest bieg z wydłużoną fazą lotu.

2.10 RELATYWISTYCZNE TRANSFORMACJE PRĘDKOŚCI

Poznana dawka paradoksów teorii względności jest na razie wystarczająca, zajmijmy się teraz innym zagadnieniem. Zapomnijmy na chwilę o teorii względności i spójrzmy raz jeszcze na transformację Galileusza (1.10). Rozważmy ruch punktu opisanego w układzie nieprimowanym równaniem $x(t)$, a w układzie primowanym równaniem $x'(t')$. Prędkość punktu w pewnej chwili t wynosi $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Z jaką prędkością punkt ten poruszał się będzie w układzie primowanym? Różniczkując transformację Galileusza (1.10) bez trudu znajdujemy:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V = v - V. \quad (2.15)$$

Wzór ten znamy oczywiście z codziennego doświadczenia, więc niczemu się nie dziwimy. W podobny sposób możemy znaleźć jego relatywistyczny odpowiednik różniczkując transformację Lorentza (1.8):

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}. \quad (2.16)$$

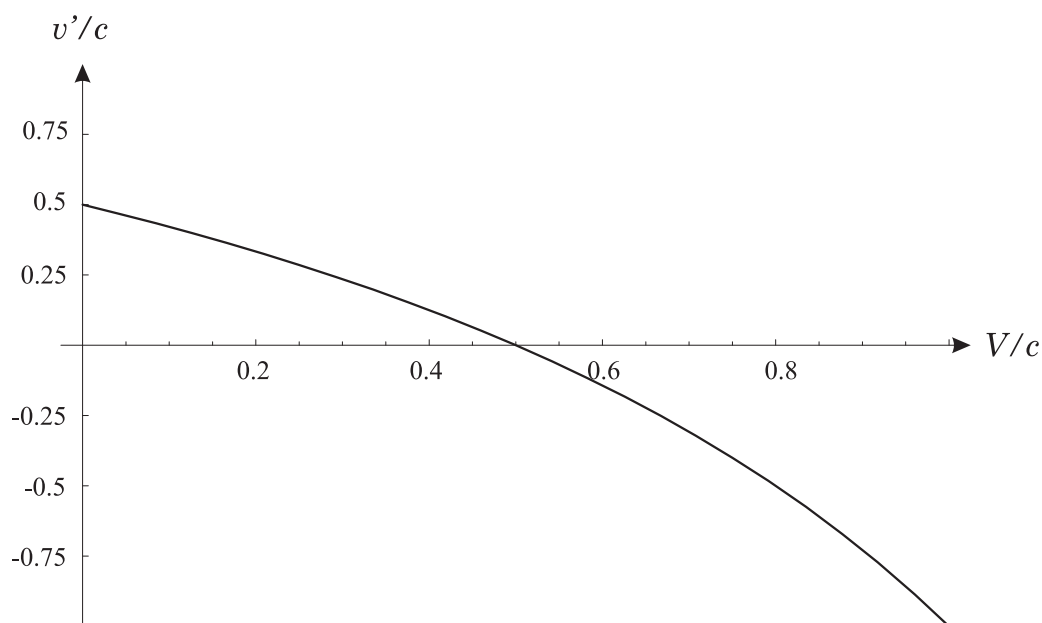
Tą prostą metodą udało nam się otrzymać wzór wyznaczający prędkość dowolnego obiektu w układzie primowanym, jeśli w układzie nieprimowanym obiekt ten porusza się z prędkością v . Co więcej, nasz wzór jest poprawny dla dowolnego ruchu rozważanego punktu, niekoniecznie ruchu ze stałą prędkością. Ze stałą prędkością V musi się natomiast poruszać układ inercjalny, z którego prowadzimy obserwacje.

Mając powyższy wzór, możemy łatwo sprawdzić rzekomą stałość prędkości światła. Jeśli w jednym układzie coś* porusza się z prędkością $v = c$, to w drugim układzie, poruszającym się tradycyjnie z dowolną prędkością V :

$$v' = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c \frac{1 - V/c}{1 - V/c} = c. \quad (2.17)$$

Zatem wszystko się zgadza, prędkość światła po przejściu do dowolnego inercjalnego układu się nie zmienia. Doskonale. Na rysunku 2.8 znajduje się wykres przykładowej zależności

*niekoniecznie musi to być światło

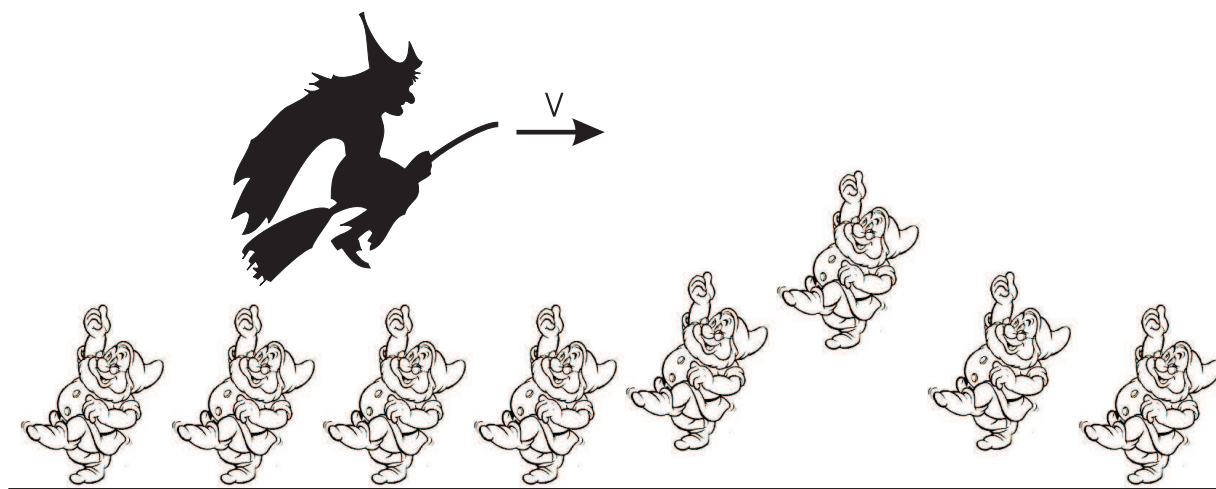


Rysunek 2.8: Zależność prędkości poruszającego się ciała od prędkości układu odniesienia z którego prowadzona jest obserwacja. W układzie nieruchomym ciało porusza się z prędkością $v = 0.5c$. Im szybciej porusza się układ odniesienia, tym mniejsza jest obserwowana prędkość. Dla $V = v$ prędkości się zrównują i ciało staje się nieruchome. Zauważmy, że zależność $v'(V)$ jest liniowa dla małych prędkości V , jak w mechanice nierelatywistycznej.

prędkości obserwowanego punktu v' od prędkości układu odniesienia V z którego prowadzona jest obserwacja. Przyjęliśmy, że w układzie spoczywającym punkt porusza się z prędkością $v = 0.5c$. Widać, że im szybciej porusza się układ odniesienia, tym mniejsza jest obserwowana prędkość punktu. Dla $V = v$ prędkości się zrównują i ciało staje się nieruchome. Zauważmy, że zależność $v'(V)$ jest liniowa dla małych wartości V , jak w nierelatywistycznej mechanice.

Za chwilę odkryjemy jednak coś niezwykłego. W poprzednim przykładzie obiektem obserwacji był punkt poruszający się z prędkością mniejszą niż lub równą c . Przeprowadzimy teraz podobną analizę dla obiektu poruszającego się z nadświatłą prędkością. Pamiętacie meksykańską falę krasnoludków na urodzinach Królowy Śnieżki? Sprawdźmy teraz, jaką prędkość fali zaobserwuje przelatująca na miotle z prędkością V Baba Jaga poruszająca się wzdłuż szeregu podskakujących krasnoludków – rysunek 2.9.

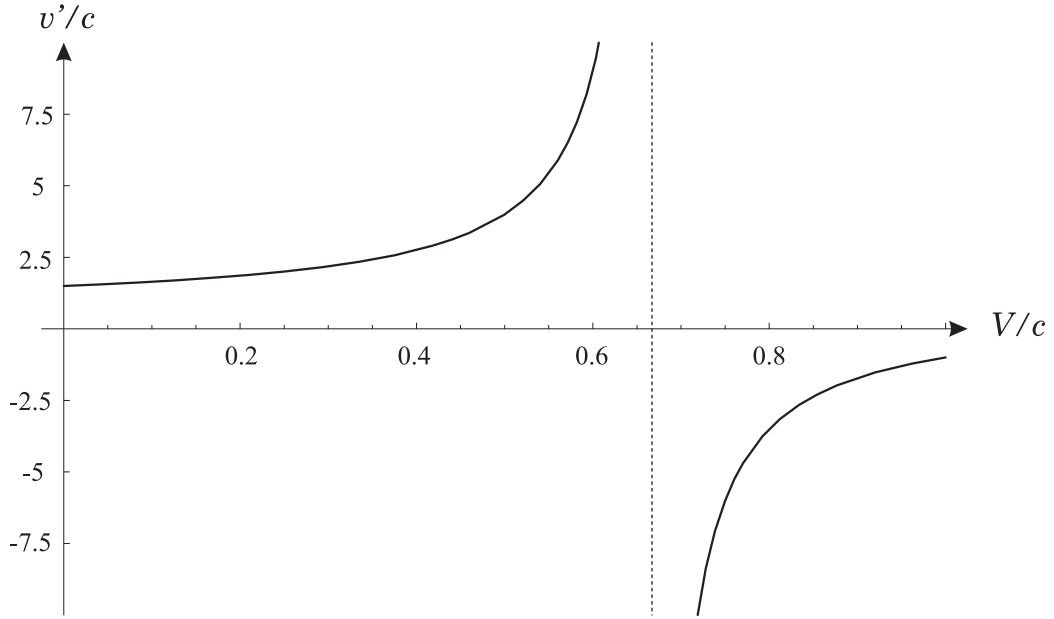
Powiedzmy, że według Królowy meksykańska fala przesuwa się z prędkością $v = 1.5c$. Na rysunku 2.10 znajduje się prędkość fali v' zarejestrowana przez Babę Jagę w zależności



Rysunek 2.9: Baba Jaga przelatująca nad meksykańską falą krasnoludków.

od prędkości miotły V . Zależność ta wydaje się bardzo nieintuicyjna. Im szybciej Baba Jaga goni falę krasnoludków, tym szybciej ona ucieka! Dla $V = c^2/v$ prędkość fali staje się nieskończona (wszystkie krasnoludki podskakują jednocześnie). Dopiero przy dalszym wzroście prędkości miotły kierunek fali odwraca się i fala zaczyna się poruszać w przeciwną stronę. Ten niecodzienny, efekt uciekających krasnoludków przypomina świat Alicji w Krainie Czarów, nieprawdaż? Krasnoludki uciekają Babie Jadze tym szybciej, im szybciej goni je ona na swej miotle. Domyślamy się też, że jeżeli krasnoludki wykonałyby falę poruszającą się dokładnie z prędkością światła, to niezależnie od prędkości miotły, prędkość fali byłaby zawsze taka sama – c . Zatem stałość prędkości światła to nie cecha samego światła, lecz własność czasoprzestrzeni. Niezależnie od tego, co porusza się z prędkością c , prędkość ta będzie w każdym układzie jednakowa.

Nasz wynik w postaci wzorów transformacyjnych prędkości (2.16) nie jest jednak ogólny, a dotyczy tylko jednowymiarowego ruchu wzdłuż osi x . Rozważmy zatem przypadek ruchu trójwymiarowego widzianego z punktu widzenia układu spoczywającego oraz poruszającego się wzdłuż osi x . Jeżeli ruch w układzie nieprimowanym opisywany jest wektorem prędkości $\mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z)$ (w całym wykładzie stosujemy konwencję oznaczania wektorów pogrubionymi symbolami), to w układzie primowanym będziemy mieli:



Rysunek 2.10: Efekt uciekających krasnoludków. Bardzo nieintuicyjna zależność nadświatłowej prędkości z jaką porusza się fala krasnoludków od prędkości układu odniesienia z którego prowadzona jest obserwacja. W układzie nieruchomym ($V/c = 0$) fala porusza się z prędkością $v = 1.5c$. Im szybciej porusza się układ odniesienia, tym większa jest obserwowana prędkość, czyli im szybciej gonimy falę, tym szybciej ona ucieka! Dla $V = c^2/v$ prędkość fali staje się nieskończona (wszystkie krasnoludki podskakują jednocześnie). Przy dalszym wzroście prędkości układu odniesienia kierunek fali odwraca się.

$$\begin{aligned}
 v'^x &= \frac{v^x - V}{1 - v^x V/c^2} \\
 v'^y &= \frac{v^y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v^x V/c^2} \\
 v'^z &= \frac{v^z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v^x V/c^2}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Powyższy układ równań transformacyjnych można również zapisać w ogólnej postaci dla dowolnej prędkości $\mathbf{V}$, niekoniecznie skierowanej wzdłuż osi x . W tym celu zastępujemy wyrażenie v_x przez $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V}$, co prowadzi do dwóch równań:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'_{\parallel} &= \frac{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} - \mathbf{V}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}} \\
\mathbf{v}'_{\perp} &= \frac{\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}\right) \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

gdzie $\mathbf{v}'_{\parallel}$ i $\mathbf{v}'_{\perp}$ oznaczają wektorowe składowe transformowanej prędkości, odpowiednio, równoległą i prostopadłą do kierunku prędkości względnej $\frac{\mathbf{V}}{V}$, natomiast wyrażenie $\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}$, to nic innego jak wektorowa składowa prędkości $\mathbf{v}$ prostopadła do $\frac{\mathbf{V}}{V}$, czyli prędkość $\mathbf{v}$ pomniejszona o składową równoległą. Dodając do siebie powyższe równania $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp}$ dostajemy ostatecznie:

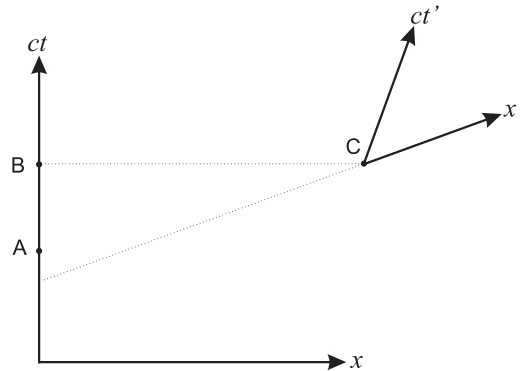
$$\mathbf{v}' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}\right) - \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}\right)}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}. \tag{2.20}$$

I pomyśleć jak bardzo sprawy mogą się skomplikować. Przypomnijmy tylko, że zwykły, nierelatywistyczny odpowiednik powyższego potwora to po prostu $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$.

2.11 NOWE DOWODY W SPRAWIE RZEKOMEJ ŚMIERCI ELVISA P.

Zdążyliśmy już się zorientować, że pojęcie jednoczesności jest raczej chwiejne – zdarzenia jednoczesne dla jednego obserwatora, nie muszą być jednoczesne dla innego. Zastanówmy się więc, czy to możliwe, żeby zdarzenie z naszej przeszłości zachodziło teraz z punktu widzenia innego obserwatora. Na przykład: czy istnieje układ odniesienia, w którym Elvis Presley wciąż żyje?

Sformułujmy problem ściśle: niech zdarzenie A oznacza śmierć Elvisa 17 sierpnia 1977 roku w Graceland, a zdarzenie B oznacza uroczystość 30. rocznicy jego śmierci, tamże. Czy istnieje taki obserwator, którego linia świata przecina zdarzenie C, które jest w naszym układzie odniesienia równoczesne z B, a w jego układzie odniesienia ma miejsce wcześniej niż A? Jeśli tak, to jakie jest położenie zdarzenia C i prędkość przecinającego go obserwatora?



Rysunek 2.11: Zdarzenie A oznacza śmierć Elvisa, a zdarzenie B to uroczystość 30. rocznicy jego śmierci. Zdarzenie C jest w nieprimowanym układzie odniesienia jednocześnie z B, a w układzie primowanym zachodzi wcześniej niż A. Płaszczyzny równoczesności w obu układach zaznaczono kropkowymi liniami.

Odpowiedź na tak postawione pytanie znajduje się na rysunku 2.11. W spoczywającym, nieprimowanym układzie odniesienia zdarzenie C równoczesne z B jest przecinane przez linię świata pewnego obserwatora. Na rysunku przedstawiono przykładowy primowany układ współrzędnych związany z poruszającym się obserwatorem, którego płaszczyzna równoczesności x' sięga przeszłości zdarzenia A. Innymi słowy w układzie primowanym w chwili związanej ze zdarzeniem C zdarzenie A jeszcze nie nastąpiło, zatem Elvis wciąż żyje. Przedstawiony argument daje się zastosować do dowolnego zdarzenia z przeszłości – zawsze znajdzie się obserwator, według którego zdarzenie jeszcze nie zaszło. Co więcej, gdy odległy obserwator przecinający C nie oddala się od nas, lecz zbliża, jego teraz może sięgać dowolnie daleko w przyszłość. Wystarczy, by rozważany obserwator poruszał się wystarczająco szybko i był wystarczająco daleko. Oznacza to, że istnieje układ odniesienia, w którym najbliższe losowanie totolotka (zwanego niekiedy podatkiem od głupoty) już się odbyło. Nasuwa się pytanie, czy można od takiego obserwatora dowiedzieć się jakie liczby obstawiać?

Spróbujmy ustalić jakie warunki muszą być spełnione, by pewne przyszłe dla nas zdarzenie A, oddalone w czasie od naszego teraz o T było teraźniejszością dla obserwatora przecinającego C. Zdarzenie „tu i teraz” oznaczamy B. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi $t_A = 0$, $x_A = x_B = 0$ oraz $t_B = t_C = -T$. Gdy $T < 0$, wówczas A znajduje się w naszej przeszłości, a gdy $T > 0$, to A jest w przyszłości. To co nas interesuje, to x_C oraz V , czyli położenie i prędkość obserwatora, według którego A dzieje się teraz. Z przyjętej konstrukcji wynika żądanie, aby $t'_C = 0$, skąd dostajemy związek:

$$x_C = -\frac{c^2 T}{V}. \quad (2.21)$$

Ponieważ zakładamy, że prędkość obserwatora nie przekracza c , to zachodzi $|x_C| > c|T|$. To zaś oznacza, że poruszający się obserwator musi być poza stożkiem przyszłości (przeszłości) zdarzenia A. Zatem A i C nie mogą tworzyć związku przyczynowo-skutkowego. Widzimy też, że dla każdej prędkości V znajdzie się taka odległość, w której ruchomy obserwator uzna zdarzenie A za teraźniejsze. Nie zachodzi natomiast przeciwna relacja. Ponadto obserwator, według którego losowanie totolotka miało już miejsce jest zawsze zbyt daleko, byśmy mogli nawiązać z nim jakikolwiek kontakt. On zresztą do wyników losowania również nie ma dostępu, mimo że już się ono odbyło, bo żadnym podświetlnym sposobem nie zdążyłyby one do niego dotrzeć.

Tak więc mieszkańcy planety znajdującej się 100 lat świetlnych od nas, oddalającej się od nas z prędkością mniej więcej $\frac{c}{3}$ żyją w świecie, w którym Elvis wciąż gra i śpiewa. Niestety, gdy już dotrą do nich zbłąkane w przestrzeni kosmicznej transmisje radiowe emitowane na żywo z koncertów Elvisa, będzie już niestety po sprawie.

Pytania

- Czy zawsze istnieje układ odniesienia, w którym dowolne dwa różne zdarzenia są jednoczesne? Czy istnieje układ odniesienia, w którym narodziny Davida Lyncha i emisja ostatniego odcinka Twin Peaks odbyły się w tym samym czasie? A w tym samym miejscu? W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznacz ten układ.
- Jakie warunki powinny spełniać dwa zdarzenia, aby odpowiedź na którekolwiek z powyższych pytań była twierdząca? Dla jakiej pary zdarzeń odpowiedź na obydwa pytania jest twierdząca?
- Czy kolejność zdarzeń oddzielonych interwałem zerowym zależy od układu odniesienia?
- Czy dla każdej pary zdarzeń istnieje nietrywialna transformacja Lorentza nie zmieniająca odstępu czasu między tymi zdarzeniami?

- W jaki sposób z zasady względności wynika, że skrócenie poruszających obiektów, prostopadłe do kierunku ruchu jest niemożliwe?
- Czy to prawda, że skrócenie Lorentza jest efektem pozornym i wynika z tego, że światło opuszczające obserwowany obiekt potrzebuje skończonego czasu by dotrzeć do obserwatora?
- Czy na podstawie samej transformacji Galileusza można udowodnić, że prawdziwy upływ czasu i prawdziwa długość w obiektach poruszających się ze stałą prędkością jest taka sama jak dla obiektów spoczywających? Jeśli tak, to czy można w podobny sposób wydedukować własności prawdziwego upływu czasu i prawdziwych długości dla rzeczywistości opisywanej transformacjami Lorentza? Jeśli założymy prawdziwość transformacji Lorentza, czy są jakieś podstawy by przypuszczać, że dylatacja czasu i skrócenie Lorentza są jedynie zjawiskami pozornymi? Co by to miało oznaczać?
- Gdyby zrezygnować z postulatu zegara poszukując ogólniejszego wyrażenia na czas własny w ruchu po dowolnym torze, jakie najogólniejsze własności powinno mieć to wyrażenie?
- Czy przy zmianie układu odniesienia w ogólności zmieniają się tylko składowe prędkości ciał wzdłuż kierunku ruchu układu, czy także w kierunkach prostopadłych?
- Czy to prawda, że wartość i kierunek prędkości światła nie zależy od układu odniesienia?
- Czy przejście z układu A do poruszającego się względem niego z prędkością V układu B , a następnie z układu B do układu C poruszającego się względem B z prędkością V wzdłuż tej samej osi jest równoważne przejściu z układu A do układu D poruszającego się względem A z prędkością $2V$?

Zadania

- W przestrzeni kosmicznej porusza się wzdłuż wspólnej prostej sto rakiet w taki sposób, że druga oddala się od pierwszej z prędkością $0.9c$, trzecia od drugiej również z prędkością $0.9c$ i tak dalej aż do ostatniej rakiety. Jaka jest względna prędkość setnej rakiety względem pierwszej?

- Ze statku kosmicznego oddalającego się od Ziemi z radialną prędkością v nadawana jest audycja radiowa. Czas nadawania audycji w studio na statku wynosi $\tau = 30$ minut. Jak długa trwa odbiór audycji na Ziemi?
- W analogii do wzoru (2.20) wyprowadź wektorowe równania opisujące transformację Lorentza dla dowolnego wektora prędkości względnej układów i zbadaj ich granicę nierelatywistyczną.

Rozdział 3

OBRÓT THOMASA-WIGNERA[★]

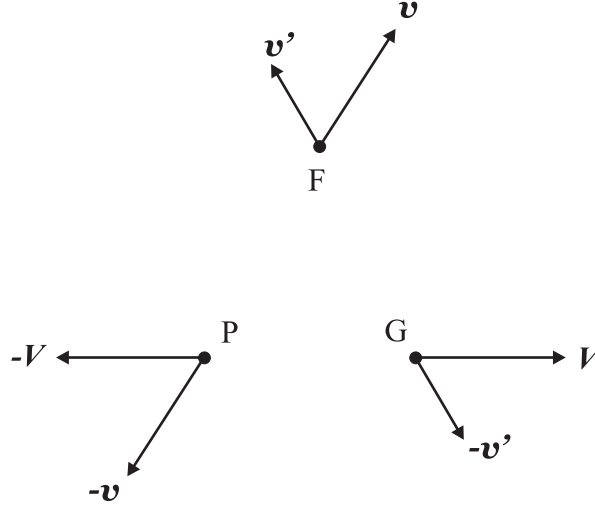
Będzie kolejna niespodzianka. Przekonamy się mianowicie, jak dywagacje na temat kinematyki kota domowego prowadzą do ciekawego wniosku o dynamice spinu elektronu w atomie. Rzecz będzie o precesji Thomasa – relatywistycznym zjawisku, którego prostego wyprowadzenia na próżno szukać w podręcznikach teorii względności. W niniejszym rozdziale postaramy się tę myślową dziurę zalepić.

3.1 OBRÓT KOTA FILEMONA

Rozważmy następujący problem. Dwóch znanych nam już z poprzedniego rozdziału inercjalnych obserwatorów przygląda się kotu Filemonowi przemykającemu chytrze ze stałą prędkością. W układzie obserwatora Pawła Filemon biegnie z prędkością $\mathbf{v}$, natomiast według obserwatora Gawła Filemon mknie z prędkością $\mathbf{v}'$. Czy znając wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ możemy wyznaczyć prędkość $\mathbf{V}$ Gawła względem Pawła, jeśli wiemy, że osie związanych z nimi układów są wzajemnie równoległe?

Zagadnienie nie wydaje się trudne. Z treści wynika, że prędkość Pawła względem Gawła to $-\mathbf{V}$. Możemy również wprowadzić układ Filemona, w którym Paweł porusza się zapewne z prędkością $-\mathbf{v}$, a Gaweł z prędkością $-\mathbf{v}'$, co przedstawia schematycznie rysunek 3.1. Skoro tak, to można posłużyć się wzorem (2.20) z odpowiednio zamienionymi prędkościami. Jeśli przechodzimy z układu Filemona do układu Pawła, wówczas zamieniamy $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}'$,

[★]Niniejszy rozdział opisuje niezwykle ciekawy, ale rachunkowo nieco bardziej złożony problem, więc Czytelnik preferujący oszczędny wysiłek może przy pierwszym czytaniu przejść od razu do kolejnego rozdziału nie tracąc ciągłości wywodu.



Rysunek 3.1: Schemat względnych prędkości trzech układów odniesienia.

a $\mathbf{V} \mapsto -\mathbf{v}$, zaś nieznaną i poszukiwaną prędkością jest $\mathbf{v}' \mapsto \mathbf{V}$. Wstawiając powyższe do wzoru (2.20) dostajemy:

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(-\mathbf{v}' + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right) + \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right)}{1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}. \quad (3.1)$$

W tym momencie co niektórych może ugodzić pewien dysonans poznawczy. Z jednej strony nasze postępowanie wydaje się w pełni legalne, ale z drugiej... czy przypadkiem otrzymane wyrażenie nie powinno być antysymetryczną funkcją $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$? Krótka przerwa na zastanowienie. Powinno! A czy jest? Na pierwszy rzut oka tego nie widać, rozważmy jednak dla pewności szczególny przypadek, w którym prędkości $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ są prostopadłe. Wówczas otrzymane wyrażenie redukuje się do:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{v}' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

czyli wzór antysymetryczny, owszem, nie jest! Musieliśmy więc popełnić gdzieś błąd w rozumowaniu. Tu następuje nieco przeciągająca się chwila na zastanowienie.

Otóż nasze niedopatrzenie miało miejsce, gdy wprowadziliśmy układ inercjalny kota Filemona. Załóżmy bowiem, że osie tego układu są równoległe do osi układu Gawła i osie układu Pawła również są równoległe do osi układu Gawła. Sytuacja taka możliwa jest na

przykład, gdy Paweł porusza się względem Gawła wzdłuż osi x , a Filemon porusza się względem Gawła wzdłuż osi y . Wówczas według Gawła skróceniu Lorentza podlega oś x Pawła oraz oś y Filemona. Jednak według Gawła wszystkie osie w całości i jednocześnie nałożyły się na siebie w chwili $t = 0$. Zwróćmy uwagę: jednocześnie! A jednoczesność, jak pamiętamy, zależy od obserwatora. Oznacza to, że jeśli patrzeć będziemy na tę samą sytuację z układu Pawła, to osie wcale nie nałożą się w całości jednocześnie. Różne punkty osi spotykać się będą w różnych chwilach czasu, to zaś oznacza, że z punktu widzenia samych zainteresowanych, czyli Pawła i Filemona, ich osie wcale nie będą wzajemnie równoległe. Jak to możliwe? No cóż, według Pawła, Filemon nie porusza się ani wzdłuż osi x , ani wzdłuż osi y , lecz „ukośnie”. To zaś oznacza, że na skutek skrócenia Lorentza osie Filemona widziane przez Pawła nie utworzą kąta prostego. Do podobnych wniosków dojdzie zresztą Filemon obserwując osie Pawła. Należałoby się zatem spodziewać, że osie x układów Filemona i Pawła nachylone będą według nich pod pewnym niezerowym kątem. Podobnie osie y obu układów. Ku naszemu zaskoczeniu, sytuacja jest jednak nieco inna. Otóż według Pawła, który porusza się względem Gawła wzdłuż osi x , oś x Filemona jest co prawda nachylona pod pewnym kątem, ale osie y Pawła i Filemona są nadal równoległe, tak samo, jak były równoległe według Gawła. Jest tak dlatego, że transformacja Lorentza z układu Gawła do układu Pawła nie zmienia składowych y -owych. Analogicznie, według Filemona poruszającego się względem Gawła wzdłuż osi y , osie x -owe Pawła i Filemona są równoległe. Wygląda to tak, jakby układ inercjalny Filemona i Pawła były względem siebie obrócone o pewien zagadkowy kąt. Nietrudno się domyślić, że to właśnie ten kąt jest źródłem naszych kłopotów. Podajmy teraz bardziej precyzyjne rozumowanie, które prowadzi do otrzymanego wniosku.

Wszystko byłoby łatwe i piękne, gdyby przejście do układu poruszającego się z prędkością $\mathbf{v}$ było równoważne złożeniu transformacji dla prędkości $\mathbf{V}$, a następnie dla prędkości $\mathbf{v}'$. To, że wyrażenie (3.2) nie jest antysymetryczne dowodzi, że powyższa teza musi być błędna. Jeśli więc zamianę współrzędnych z układu spoczywającego $(ct, \mathbf{r})$ do układu $(ct', \mathbf{r}')$ poruszającego się z prędkością $\mathbf{V}$ oznaczmy symbolem $\Lambda(\mathbf{V})$, wówczas w ogólności:

$$\Lambda(\mathbf{v}) \neq \Lambda(\mathbf{v}')\Lambda(\mathbf{V}), \quad (3.3)$$

nawet dla $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ i $\mathbf{V}$ związanych relacją (2.20). Zastanówmy się zatem, czym różni się układ,

do którego przechodzimy z układu Pawła poprzez transformację $\Lambda(\mathbf{v})$ od układu zadanego poprzez złożenie $\Lambda(\mathbf{v}')\Lambda(\mathbf{V})$. Innymi słowy zadajmy pytanie, czym jest transformacja $\mathcal{R}$ zdefiniowana równaniem:

$$\mathcal{R}\Lambda(\mathbf{v}) = \Lambda(\mathbf{v}')\Lambda(\mathbf{V}). \quad (3.4)$$

Przed wszystkim musimy jasno stwierdzić, że rozważane dwa układy muszą być we wzajemnym spoczynku – jest to zagwarantowane spełnieniem związku (2.20). Ponadto wartość interwału między dowolną parą zdarzeń w pierwszym układzie musi być równa interwałowi w drugim układzie. Te dwa stwierdzenia oznaczają, że przekształcenie $\mathcal{R}$, które zależy od $\mathbf{v}$ i $\mathbf{V}$ ($\mathbf{v}'$ można wyrazić zależnością (2.20)) może być jedynie translacją, odbiciem, obrotem przestrzennym lub ich złożeniem. Pierwsza możliwość odpada ze względu na to, że translacja w przestrzeni o pewien wektor $\mathbf{r}_0$, bądź w czasie o t_0 nie daje się wyrazić jedynie przez prędkości (analiza wymiarowa). Odbicie również nie wchodzi w grę, bo w granicy $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{0}$ musi zachodzić $\mathcal{R} \rightarrow \mathbf{1}$, a odbicia nie są przekształceniami parametryzowanymi żadnym ciągłym parametrem. Oznacza to, że rozważane dwa układy mogą być (i w ogólności są!) względem siebie jedynie obrócone. Jest zatem jasne, że choć Filemon porusza się względem Pawła z prędkością $\mathbf{v}$, to Paweł wcale nie porusza się względem Filemona prędkością $-\mathbf{v}$, lecz z prędkością $-\mathcal{R}\mathbf{v}$. Oznacza to, że jedna z prędkości na diagramie 3.1 oraz równanie (3.1) są błędne.

Obrót, który właśnie odkryliśmy nazywa się *obrotem Thomasa-Wignera* i pojawia się w przekształceniach zawsze, gdy prędkości rozważanych układów nie leżą na jednej prostej. Rzeczą godną odnotowania jest również fakt, że pojawiający się obrót układu współrzędnych odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory prędkości.

3.2 PRECESJA THOMASA

Nasze odkrycie obrotu, który pojawia się przy składaniu dwóch transformacji Lorentza ma dość ciekawą konsekwencję. Otóż jeśli pod wpływem zewnętrznych sił ruchome ciało zmieni kierunek swojej prędkości, to zmianie tej musi towarzyszyć obrót. Tym samym ciało, które porusza się po krzywoliniowym torze musi się wciąż obracać. I to przy całkowitym braku momentu siły. Naszym celem będzie teraz wyznaczenie prędkości kątowej tego obrotu.

Przyjrzyjmy się więc uważniej operacji $\mathcal{R}$ w przybliżeniu niewielkich kątów obrotu. Gdy prędkość Filemona w układzie Gawła jest niewielka (zamiast $\mathbf{v}'$ oznaczmy ją $d\mathbf{v}'$), wówczas układ Filemona obrócony jest względem układu Pawła właśnie o niewielki kąt $d\Omega$. Spróbujmy ów kąt wyznaczyć. W tym celu zaniedbajmy w wyrażeniu odwrotnym do (2.20) wszystkie wyrazy rzędu wyższego niż pierwszy w $d\mathbf{v}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(d\mathbf{v}' - \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right) + \left(\mathbf{V} + \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right)}{1 + \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}} \\ &\approx \mathbf{V} + \sqrt{1 - V^2/c^2} \left[d\mathbf{v}' + \mathbf{V} \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2} \left(\sqrt{1 - V^2/c^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Stąd zaś wnioskujemy, że jeśli Gawł niósł Filemona na rękach z prędkością $\mathbf{V}$ względem Pawła, a w pewnej chwili Filemon poczuwszy zew natury zaczął uciekać Gawłowi z prędkością $d\mathbf{v}'$ (względem niego), to w układzie Pawła prędkość Filemona w momencie ucieczki zmieniła się o niewielki wektor:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \approx \sqrt{1 - V^2/c^2} \left[d\mathbf{v}' + \mathbf{V} \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2} \left(\sqrt{1 - V^2/c^2} - 1 \right) \right]. \quad (3.6)$$

Wiemy już, że diagram 3.1 zawiera błąd i według Filemona Paweł wcale nie porusza się z prędkością $-\mathbf{v}$. Porusza się on z jakąś inną, obróconą prędkością $\tilde{\mathbf{v}} = -\mathcal{R}\mathbf{v}$, którą teraz obliczymy. Skorzystamy w tym celu ponownie z wyrażenia (2.20), w którym jednak prędkości $\mathbf{v}'$, $\mathbf{V}$ i $\mathbf{v}$ zasąpimy wektorami, odpowiednio $\tilde{\mathbf{v}}$, $d\mathbf{v}'$ i $-\mathbf{V}$, zgodnie z poprawną częścią diagramu 3.1. Zaniedbując ponownie wyrazy wyższego rzędu niż liniowe w $d\mathbf{v}'$ dostajemy:

$$\tilde{\mathbf{v}} \approx -\mathbf{V} \left(1 - \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) - d\mathbf{v}'. \quad (3.7)$$

Wiemy już, że wektory $\tilde{\mathbf{v}}$ i $-\mathbf{v}$ są względem siebie obrócone o pewien niewielki kąt $d\Omega$ dany w przybliżeniu wzorem:

$$-\mathbf{v} = \mathcal{R}^{-1}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\mathbf{v}} - d\Omega \times \tilde{\mathbf{v}}. \quad (3.8)$$

Naszym celem jest wyznaczenie kąta $d\Omega$ odpowiadającego niewielkiej zmianie prędkości $d\mathbf{v}$. By go wyznaczyć, obliczmy iloczyn $d\Omega \times \tilde{\mathbf{v}}$ korzystając z przybliżonych wzorów (3.5), (3.7) oraz (3.8):

$$d\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}} \approx \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}} = - \left(1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}\right) \left(d\mathbf{v}' - \mathbf{V} \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2}\right). \quad (3.9)$$

Grzechem byłoby nie zauważyć, że $d\boldsymbol{\Omega}$ musi być wektorem kąta obrotu w jedynej wyróżnionej w problemie płaszczyźnie – płaszczyźnie rozpiętej przez wektory prędkości, na przykład $\mathbf{V}$ i $d\mathbf{v}$. Możemy zatem napisać:

$$d\boldsymbol{\Omega} = \frac{\Omega}{c^2} \mathbf{V} \times d\mathbf{v}, \quad (3.10)$$

przy czym wartość Ω jest wciąż nieznana. Z powyższego równania wynika inny sposób wyznaczenia iloczynu $d\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}}$. Podstawiając wzory (3.6) i (3.7) i zostawiając jedynie wyrazy liniowe w $d\mathbf{v}'$, a następnie stosując tożsamość $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ dostajemy:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}} &\approx \frac{\Omega}{c^2} (\mathbf{V} \times d\mathbf{v}) \times \left[-\mathbf{V} \left(1 - \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) - d\mathbf{v}' \right] \\ &= \frac{\Omega}{c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2} (\mathbf{V} \times d\mathbf{v}') \times \left[-\mathbf{V} \left(1 - \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) - d\mathbf{v}' \right] \\ &\approx \frac{\Omega}{c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2} \mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times d\mathbf{v}') \\ &= -\frac{\Omega}{c^2} V^2 \sqrt{1 - V^2/c^2} \left(d\mathbf{v}' - \mathbf{V} \frac{d\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{V^2}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Z porównania (3.9) z (3.11) bez trudu wyznaczamy Ω i po wstawieniu do definicji (3.10) dostajemy ostatecznie:

$$d\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right) \mathbf{V} \times d\mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Z otrzymanego wzoru płynie ważny morał: jeśli dowolny obiekt poruszający się z prędkością $\mathbf{V}$ pod wpływem pewnej siły zmieni prędkość o $d\mathbf{v}$, to jednocześnie obiekt ten obróci się o kąt $-d\boldsymbol{\Omega}$ (według Filemona Paweł jest obrócony operacją $\mathcal{R}$, zatem Filemon według Pawła podlega obrotowi w przeciwną stronę $\mathcal{R}^{-1}$ – stąd ujemny znak). Mimo, że nie działał

żaden moment siły! Efekt jest czysto geometryczny. Możemy więc napisać, że gdy dowolny obiekt pod wpływem zewnętrznych sił (i zerowego momentu siły) porusza się ze zmienną prędkością $\mathbf{v}$, wówczas obraca się on z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ daną równaniem:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.13)$$

Jest to właśnie słynna *precesja Thomasa* – efekt odkryty dopiero ponad 20 lat po ogłoszeniu teorii względności, podobno ku zaskoczeniu nawet samego Einsteina (jak twierdzi Uhlenbeck). Jednym z bardziej znanych zjawisk, w których precesja ta odgrywa ważną rolę jest ruch elektronu na orbicie atomowej. Elektron poza elementarnym ładunkiem niesie również wewnętrzny moment pędu, zwany spinem (swoją drogą, pojęcie to wprowadził bohater już drugiego nawiasu w tym rozdziale, Uhlenbeck). Podczas ruchu orbitalnego kierunek spinu podlega precesji ze stałą prędkością kątową. Stosując klasyczny model takiego ruchu, przy zadanym promieniu orbity R oraz prędkości v możemy wyznaczyć kąt Ω , o jaki obróci się spin elektronu po zatoczeniu pełnego cyklu:

$$\Omega = \frac{2\pi R\omega}{v} = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx \pi \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.14)$$

Widać, że całkowity kąt nie zależy od promienia, a precesja dokonuje się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu orbitalnego. Warto też zwrócić uwagę na numer powyższego równania, może on okazać się pomocny w zapamiętaniu zadziwiającego wyniku, który właśnie otrzymaliśmy.

3.3 KOTA FILEMONA ROZWAŻAŃ CIĄG DALSZY

Powróćmy do rozważań z podrozdziału 3.1, w którym pozostał nierozwiązany, a w zasadzie rozwiązany błędnie problem. Problem wyznaczenia względnej prędkości dwóch obserwatorów. Wiemy już, gdzie popełniliśmy błąd w rozumowaniu, pozostaje pytanie, jakie jest rozwiązanie poprawne? Technicznie rzecz biorąc, by je znaleźć należy odwrócić wzór wektorowy (2.20) ze względu na prędkość $\mathbf{V}$ przy przy zadanym wektorach $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$. Uszlachetnieni gorzkim doświadczeniem spodziewamy się, że poprawne wyrażenie na $\mathbf{V}$ będzie antysymetryczną funkcją $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$. Wiemy co należy zrobić, przed nami pozostają wyłącznie

przekształcenia. Komu rachunki nie straszne, ten może poniżej prześledzić drogę do poprawnego wyniku. Bardziej lękliwych zapraszamy do kolejnego rozdziału. Rozpocznijmy od podniesienia równania (2.20) skalarnie do kwadratu. Otrzymujemy wzór:

$$\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right)^2 = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{1 - v'^2/c^2}. \quad (3.15)$$

Wynika z niego, że gdy $v < c$ również $v' < c$. Podobnie dla $v > c$ zachodzi $v' > c$. Przyjmując, że mamy do czynienia z pierwszym przypadkiem wyznaczamy wyrażenie na $\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}$, które następnie wstawiamy do wzoru (2.20) przekształconego do następującej postaci:

$$\mathbf{v}' \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \mathbf{v} = \mathbf{V} \left(-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2}\right). \quad (3.16)$$

Po niezbyt pouczających, a cokolwiek nużących przekształceniach dostajemy stąd następujące równanie:

$$\frac{\mathbf{V}}{1 + \sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}}. \quad (3.17)$$

Wyrażenie powyższe jest dość zwarte, choć możemy jeszcze wyznaczyć z niego $\mathbf{V}$ bez szpecącego mianownika. W tym celu podnosimy powyższe równanie do kwadratu, wyznaczamy V^2 i ponownie je wstawiamy do równania. Zacisnąwszy zęby dokonujemy niezbędnych przekształceń otrzymując:

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} + \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2} + \frac{1 - v^2 v'^2/c^4}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - v'^2/c^2}}} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \right). \quad (3.18)$$

Widać, że nasze trudy nagrodzone zostały niezbyt, niestety, apetycznym wzorem. I pomyśleć, że w przybliżeniu niewielkich prędkości jest tak pięknie: $\mathbf{V} \approx \mathbf{v} - \mathbf{v}'$.

Pytania

- Czy możliwa jest sytuacja, by dwie transformacje Lorentza nie prowadziły do obrotu Thomasa-Wignera?

- Czy zjawisko precesji Thomasa stoi w sprzeczności z prawem zachowania momentu pędu?
- Gawł, co krzywo strzela. Wzdłuż osi x płynie rzeka, którą płynie Paweł. W którymś momencie Paweł mija stojącego przy brzegu Gawła. Osie układów Pawła i Gawła w tym momencie pokrywają się. Gawł zaś bawi się w Indianina strzelającego z łuku w kierunku y' prostopadłym do nurtu rzeki. Mimo, że osie układu związanego ze strzałą, w którym spoczywa ona wzdłuż osi y'' pokrywają się z osiami układu Gawła, to nie są one równoległe do osi układu Pawła. Czy oznacza to, że według Pawła strzały Gawła nie poruszają się wzdłuż swojej długości, lecz pod kątem?

Zadania

- Udowodnij, że pomiędzy prędkościami $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ i $\mathbf{V}$ spełniającymi równanie (2.20) zachodzą następujące relacje:

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right),$$

$$v'^2 = \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{V})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}\right)^2}.$$

- Stosując model klasycznego ruchu po orbicie, oblicz kąt precesji Thomasa spinu elektronu po zatoczeniu pełnego obrotu wokół jądra atomu wodoru w stanie podstawowym.
- Fala podskakujących krasnoludków propaguje się w układzie Królowny Śnieżki z nieskończoną prędkością w kierunku $\pm \mathbf{s}$ (wszystkie krasnoludki stoją w rzędzie ustawionym w kierunku $\mathbf{s}$ i podskakują jednocześnie). Wyznacz prędkość $\mathbf{V}$ Baby Jagi, jeśli według niej fala krasnoludków propaguje się z prędkością $\mathbf{w}$, przy czym $w > c$.

Rozdział 4

LUŻNA BRYŁA SZTYWNA

Przed nami kolejny aspekt teorii względności. Tym razem związany z „bryłą sztywną”. Cudzyśłów znalazł się tu nieprzypadkowo, bo, jak się wkrótce okaże, pojęcie bryły sztywnej w teorii względności jest w pewnym sensie sensu pozbawione. W mechanice nierelatywistycznej bryła sztywna jest to ciało, w którym każda para punktów nie zmienia wzajemnej odległości. W mechanice ośrodków ciągłych pojęcie to uogólnia się dopuszczając powstawanie niewielkich odkształceń i napięć w ośrodku tworzącym bryłę. W przypadku relatywistycznym od razu na myśl przychodzi rola, jaką może tu odgrywać skrócenie Lorentza. Bryła sztywna poruszająca się ze stałą prędkością staje się spłaszczona, jednak efekt ten jest czysto geometryczny, zatem nie skutkuje powstawaniem żadnych napięć wewnętrznych (co innego, gdy ciało nie porusza się ruchem jednostajnym – do tego tematu jeszcze powrócimy). Okazuje się jednak, że nie to jest największym problemem. Aby zrozumieć istotę kłopotów jakie pojawiają się, gdy chcemy wprowadzić do teorii względności pojęcie bryły sztywnej, prześlmy następujący przykład.

4.1 KAŻDY KIJ MA DWA KOŃCE (ALE PROCA MA TRZY)

Wyobraźmy sobie bardzo długi, lekki, sztywny i wytrzymały kij. Jeżeli złapiemy za jeden koniec i zaczniemy kijem wymachiwać, to drugi koniec może się poruszać bardzo szybko. Wystarczy do tego niewielki ruch ręką, a jeśli kij jest bardzo lekki, to nie trzeba nawet wielkiej siły. Pytanie, czy mając dowolnie długi kij, można wprawić w ten sposób jego przeciwległy koniec w dowolnie szybki ruch? Oczywiście, nie. Nie chodzi tu o żaden praktyczny kłopot związany z tym, że kij musiałby być niesłychanie długi, a przy tym nic nie

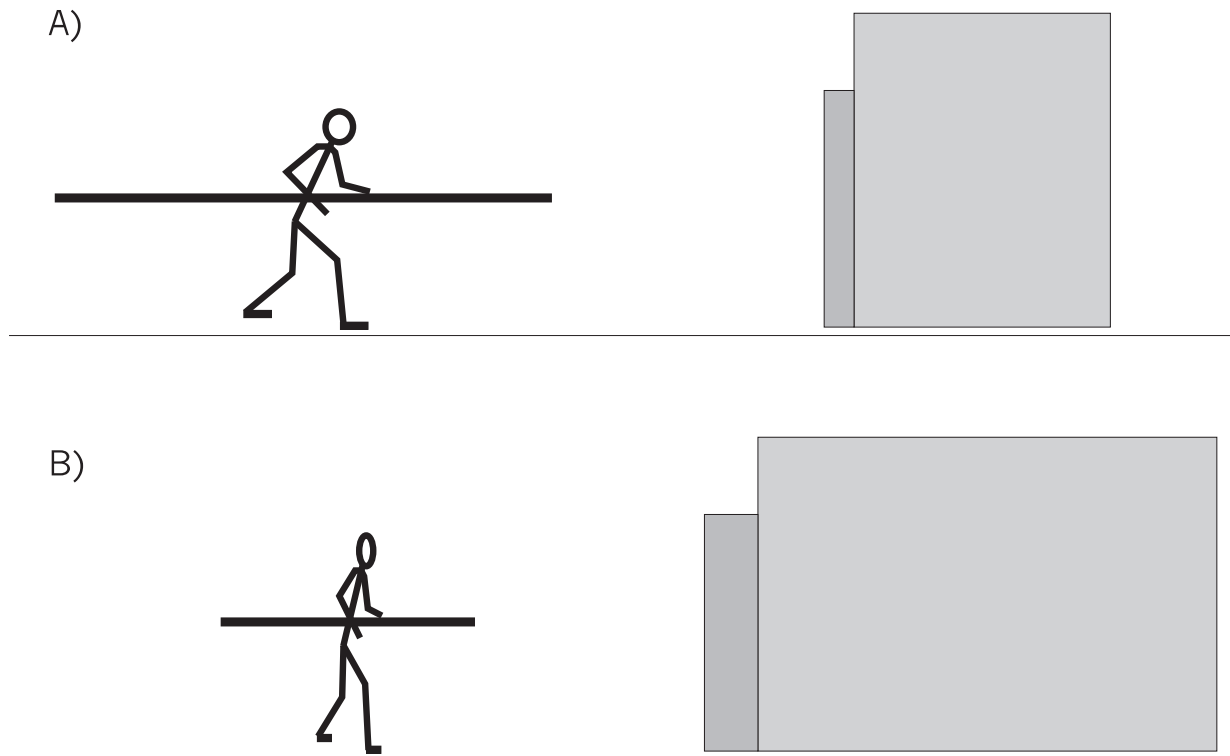
ważyć. Problem jest bardziej fundamentalny. W chwili, gdy zaczniemy ruszać ręką, wzdłuż kija zacznie propagować się fala „dźwiękowa” niosąca o tym informację. Dlatego odległy koniec nie dowie się od razu o tym, że zaczęliśmy ruszać kijem i przez jakiś czas pozostanie nieruchomy. Zagadnienie, jaki będzie naprawdę ruch kija jest niezwykle trudne, bo do jego rozwiązania wymagana jest znajomość dynamiki tensora napięć wewnątrz ośrodka z którego wykonany został kij. Nam jednak nie zależy na znalezieniu rzeczywistej reakcji całego kija na ruch trzymanego ręką końca. Ważne jest jedynie, abyśmy się przekonali, że w teorii względności nie można mówić o „sztywności” ciał. Idealne „nierelatywistyczne” ciało sztywne, reaguje bowiem na dowolną siłę zewnętrzną jednocześnie całą swoją objętością. Tego typu błyskawiczna reakcja jest w oczywisty sposób sprzeczna z założeniem, że sygnały nie mogą poruszać się dowolnie szybko.

4.2 PARADOKS TYCZKARZA I STODOŁY

Powróćmy do paradoksu warszawskiego tunelu z rozdziału 2.4. W układzie związanym z ciężarówką doszło do skrócenia tunelu, który przy odpowiedniej prędkości okazywał się dla ciężarówki za krótki. Z punktu widzenia osoby stojącej wewnątrz tunelu, to ciężarówka się skracała i w pewnej chwili znajdowała się w całości wewnątrz tunelu. Rozwiązanie problemu wymagało spostrzeżenia, że w obu układach odniesienia równoczesność oznaczała co innego. Jednakże uważny Czytelnik mógł już wówczas zauważyć kolejny problem związany z tym zagadnieniem. Oto on.

Rozważmy sytuację, gdy biegnący niezwykle szybko człowiek trzyma poziomo długą tyczkę. Na jego drodze stoi natomiast stodoła, której długość jest równa długości tyczki – rysunek 4.1. Biegnący tyczkarz próbuje zmieścić się wewnątrz stodoły – rysunek 4.1 A), ale wszystko wskazuje na to, że mu się to nie uda, bo stodoła w jego układzie odniesienia się skraca. Jednakże w układzie związanym ze stodołą to tyczka się skraca, mogąc bez większego problemu zmieścić się wewnątrz. Możemy nawet zatrzaskać drzwi za tyczkarzem, gdy znajdzie się on już w środku. Mamy więc rozbieżność pomiędzy scenariuszami rozgrywającymi się w obu układach odniesienia. Wniosek ten wydaje się sprzeczny z zasadą równouprawnienia wszystkich układów inercjalnych. Jakie jest rozwiązanie problemu?

Sytuacja w układzie stodoły nie budzi wątpliwości: tyczkarz bez trudu zmieści się wewnątrz i będzie można zamknąć go w środku razem z tyczką. W momencie gdy zderzy się on ze ścianą stodoły, jego prędkość spadnie do zera i tyczka wydłuży się wewnątrz stodoły



Rysunek 4.1: Biegący tyczkarz z punktu widzenia dwóch układów odniesienia: swojego własnego i układu stodoły. W pierwszym przypadku, stodoła (której drzwi są otwarte) doznaje skrócenia Lorentza i tyczka nie ma szans zmieścić się w środku. Jednak w układzie stodoły, to tyczka się skraca, zatem bez problemu zmieści się w środku i będzie można nawet zamknąć za nią drzwi.

utykając pomiędzy ścianą a zamkniętymi drzwiami. Zgodnie z zasadą względności to samo musi się wydarzyć w układzie tyczkarza. I wbrew naszym początkowym obawom jest tak w rzeczywistości. Musimy jedynie zdać sobie sprawę z faktu, że w momencie, gdy jeden koniec tyczki zostanie uderzony przez ścianę stodoły, front stodoły nie dowie się o tym natychmiast, lecz jeszcze przez jakiś czas będzie się poruszał wchłaniając tyczkę. Czas ten okazuje się wystarczający, by cała tyczka zmieściła się wewnątrz również w tym układzie. W jaki sposób się o tym przekonać? Wykonajmy prosty rachunek.

Przyjmijmy, że spoczynkowa długość tyczki wynosi L , a spoczynkowa długość stodoły S , przy czym:

$$L\sqrt{1 - V^2/c^2} < S, \quad (4.1)$$

czyli w układzie stodoły tyczka mieści się wewnątrz. Przejdźmy teraz do układu tyczki,

której końce A i B znajdują się w położeniach $x_A = 0$ i $x_B = L$. W chwili $t = 0$ koniec B zostaje uderzony przez tylną ścianę stodoły, która porusza się zgodnie z równaniem $x_T = L - Vt$. W tej samej chwili wzdłuż tyczki, w kierunku końca A zaczyna propagować się z prędkością światła fala uderzeniowa niosąca informację o zderzeniu końca B tyczki ze stodołą. Sygnał ten porusza się zgodnie z równaniem $x_S = L - ct$. W tym samym czasie w kierunku końca A przemieszczają się drzwi stodoły, które znajdują się w położeniu $x_D = L - S\sqrt{1 - V^2/c^2} - Vt$. Chcielibyśmy teraz ustalić, czy sygnał biegnący wzdłuż tyczki zdąży osiągnąć punkt A zanim minie go zostanie przez drzwi. Sygnał dociera do punktu $x_A = 0$ w chwili $t = \frac{L}{c}$. Gdzie w tym momencie znajdują się drzwi? Sprawdźmy:

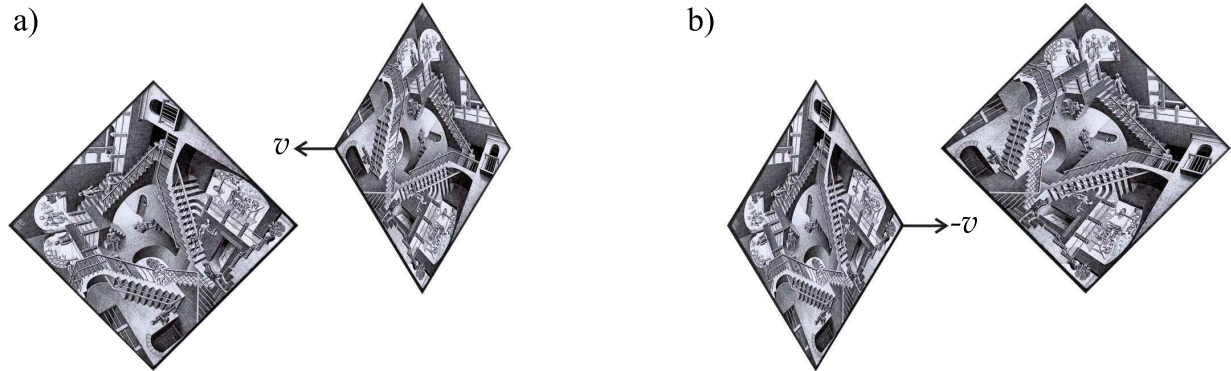
$$\begin{aligned}
 x_D &= L - S\sqrt{1 - V^2/c^2} - L\frac{V}{c} = L\sqrt{1 - V^2/c^2}\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} - S\sqrt{1 - V^2/c^2} \\
 &< S\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} - S\sqrt{1 - V^2/c^2} = S\sqrt{1 - V/c}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + V/c}} - \sqrt{1 + V/c}\right) \\
 &< 0 = x_A,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności (4.1). A zatem koniec A nie zdąży dowiedzieć się o zderzeniu, zanim tyczka nie zostanie w całości pożarta przez stodołę i kolejny paradoks mamy rozwiązany.

4.3 PARADOKS DWÓCH KWADRATÓW

Z rzekomą sztywnością „bryły sztywnej” wiąże się wiele innych interesujących paradoksów. Oto kolejny: rozważmy ruch płaski dwóch kwadratów. Niech w spoczynkowym układzie odniesienia pierwszego kwadratu drugi porusza się z prędkością v wzdłuż swojej przekątnej jak na rysunku 4.2a). Zgodnie z tym, co już wiemy poruszający się kwadrat skraca się w kierunku ruchu stając się rombem. Z rysunku widać, że kwadraty zderzą się, przy czym w pierwszej kolejności wierzchołek pierwszego kwadratu uderzy w krawędź drugiego pozostawiając w niej zapewne widoczne wgniecenie. To samo zderzenie w układzie spoczynkowym drugiego kwadratu przedstawiono na rysunku 4.2b). Widzimy, że jako pierwsze zderzą się wierzchołek drugiego kwadratu z krawędzią pierwszego i widoczny ślad uderzenia będzie gdzie indziej. Ponieważ lokalizacja „wgniecenia” nie może zależeć od układu odniesienia,

gdzieś w przedstawionym rozumowaniu musi tkwić błąd. Jakie jest poprawne rozumowanie i gdzie jest ów błąd?

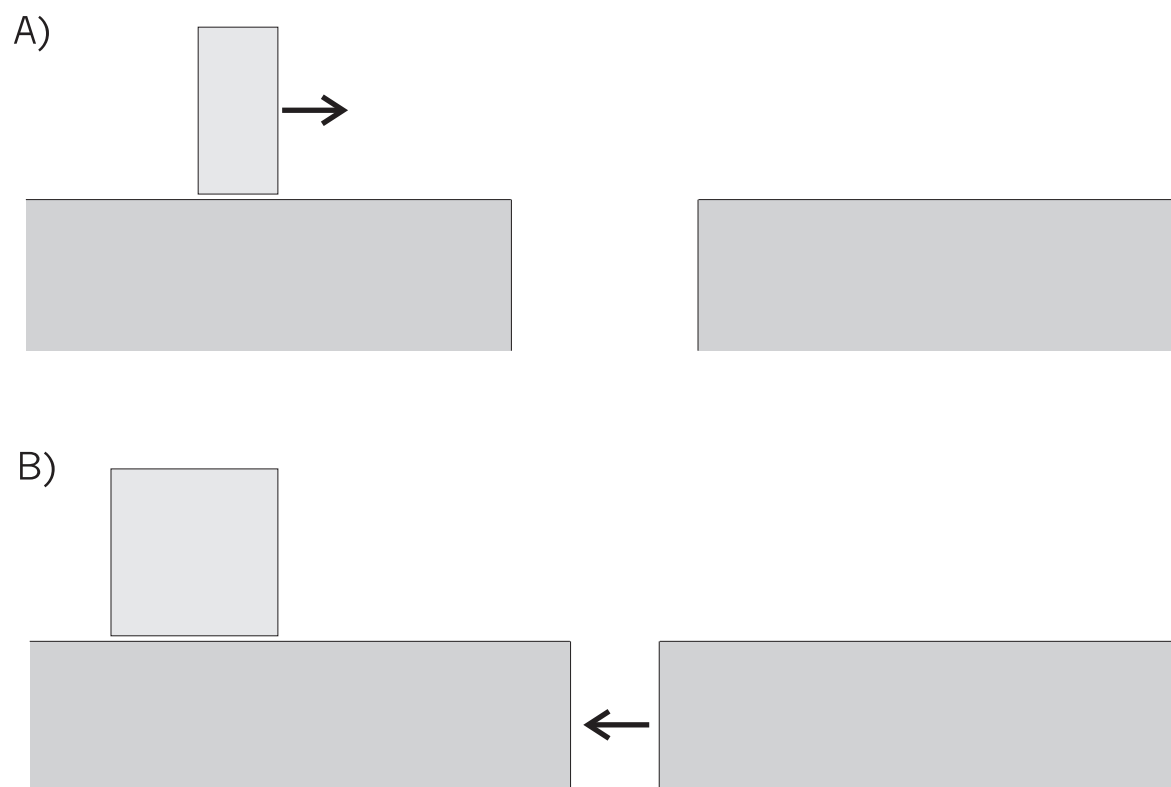


Rysunek 4.2: Zderzenie kwadratów widziane w dwóch, związanych z nimi układach odniesienia.

W układzie odniesienia, w którym kwadraty poruszają się z równymi co do wartości, ale przeciwnie skierowanymi prędkościami, obydwa obiekty stają się identycznymi rombami, które zderzają się ze sobą krawędziami. Ponieważ w tym układzie oba rozważane wcześniej wierzchołki doznają uderzenia jednocześnie, to w dowolnym innym układzie odniesienia punkt, w którym w danej chwili dochodzi do zetknięcia pędzących w przeciwnych kierunkach kwadratów będzie przesuwiał się wzdłuż krawędzi z prędkością większą niż c . Dlatego wgniecenia będą jednakowo mocne na całej długości zderzających się obszarów i punkty zderzające się w pierwszej kolejności wcale nie pozostawią wyraźniejszych śladów. Wynika to z faktu, że poszczególne zderzające się punkty nie zdążą „dowiedzieć” się, że doszło już do zderzenia pomiędzy ich sąsiadami i wytracić energii decydującej o głębokości wgniecenia w danym punkcie.

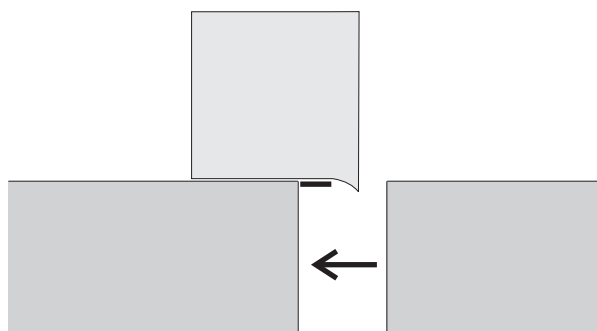
4.4 PARADOKS KLOCKA NA DZIURAWYM STOLE

Omówimy teraz jeszcze jeden paradoks związany z relatywistycznym ruchem bryły sztywnej. Wyobraźmy sobie kwadratowy (w swoim układzie spoczynkowym) klocek poruszający się po powierzchni dziurawego stołu – rysunek 4.3. W układzie stołu klocek doznaje skrócenia Lorentza i dlatego łatwo będzie mu wpaść do otworu (rysunek 4.3A). Z drugiej strony, z punktu widzenia klocka, to otwór się skraca uniemożliwiając klockowi wpadnięcie do środka (rysunek 4.3B). Problem ten okazuje się być dość skomplikowany. W momencie, gdy klocek znajdzie się częściowo nad dziurą, będzie na niego działał pewien moment siły,



Rysunek 4.3: Kłoczek poruszający się po dziurawym stole z punktu widzenia dwóch inercjalnych układów odniesienia: A) związanego ze stołem, B) związanego z klockiem.

który wywoła ruch obrotowy. To może bardzo skomplikować sprawę. Aby nieco uprościć analizę przyjmujemy, że otwór jest początkowo zakryty zapadką, która w układzie stołu zostaje całkowicie usunięta w momencie, gdy klocek w całości znajdzie się nad otworem. Nasz paradoks możemy teraz sformułować następująco: kwadrat w swoim układzie odniesienia nigdy w całości nie znajduje się nad otworem, bo w momencie, gdy tylni wierzchołek znajdzie się nad nim, przedni już dawno będzie po drugiej stronie. Czy oznacza to, że w tym układzie klocek nie ma szans wpaść? Oczywiście, tak nie jest. Zwróćmy uwagę, że w układzie stołu zapadka zostaje usunięta w całości *jednocześnie* w chwili, gdy tylni wierzchołek znalazł się nad otworem. Jednak w układzie klocka zapadka „znika” stopniowo, zaczynając od drugiego brzegu dziury jeszcze zanim klocek znajdzie się w całości nad nią. Pamiętając, że klocek nie może być uznany za bryłę sztywną zauważmy, że fragment spod którego usunięto zapadkę zacznie spadać pomimo, że reszta klocka wciąż jeszcze znajduje się na powierzchni stołu – rysunek 4.4. Z rysunku widać, że wewnątrz klocka pojawią się napięcia, które strasznie skomplikują całą dynamikę. Widzimy bowiem, że zwiększa się



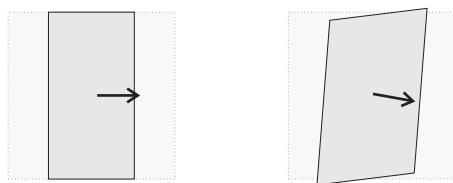
Rysunek 4.4: Fragment klocka pod którym zapadka została usunięta zaczyna zsuwać się zanim jeszcze dowie się o tym reszta „kwadratu”. Prowadzi to naturalnie do powstawania z opóźnieniem silnych wewnętrznych napięć.

objętość „kwadratowego” klocka. Napięcia muszą zatem istnieć również w układzie inercyjnym związanym ze stołem, w którym cała zapadka znika jednocześnie. W momencie, gdy nacisk zapadki na klocek ustaje, jego dolna krawędź zaczyna swobodnie opadać. Informacja o tym zaczyna się rozchodzić pionowo wzdłuż klocka i dopiero po pewnej chwili górna krawędź również zaczyna spadać. Powoduje to, że i w tym układzie klocek rozciąga się, co prowadzi do powstania wewnętrznych napięć w materiale.

Co gorsza, to jeszcze nie koniec komplikacji. Środek masy klocka w układzie stołu początkowo porusza się poziomo, lecz po usunięciu zapadki stopniowo nabywa pionowej składowej prędkości. Ponieważ skrócenie Lorentza ma miejsce zawsze w kierunku ruchu, to nawet jeśli zaniedbamy efekty związane z wewnętrznymi napięciami, klocek zmieni kształt z prostokątnego na równoległoboczny – rysunek 4.5 w związku ze zmianą kierunku prędkości. Oznacza to kolejne ogromne komplikacje. Może się bowiem zdarzyć, że pomimo iż środek masy klocka spada, to prawy, dolny wierzchołek podnosi się ponad poziom stołu. W takiej sytuacji bardzo trudno powiedzieć, czy klocek wpadnie do dziury, czy nie. Potrzeba by tu bowiem szczegółowej analizy zderzenia. Przykład ten pokazuje jak skomplikowany może być relatywistyczny problem bryły sztywnej. A pamiętajmy, że zajmowaliśmy się geometrią kwadratu – jednym z najprostszych możliwych przykładów.

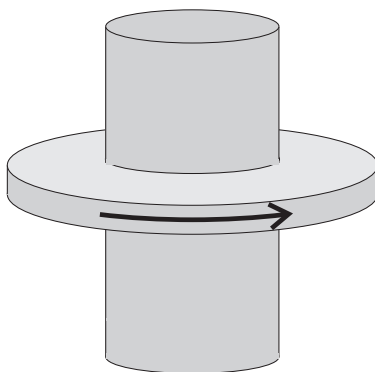
4.5 NAPIĘCIA WEWNĘTRZNE

Wiemy już, że w poruszających się ciałach czasami muszą pojawić się napięcia wewnętrzne



Rysunek 4.5: Ze zmianą kierunku prędkości klocka wiąże się również zmiana kierunku skrócenia Lorentza. Kłoczek, który w układzie spoczynkowym jest kwadratem, w układzie stołu zmienia się z prostokąta w równoległobok.

wywołane odkształceniami. Z całą pewnością jednak napięć tych nie ma w bryle poruszającej się ze stałą prędkością, bo nie ma ich w układzie spoczynkowym bryły. Napięcia nie mogą się przecież pojawić w wyniku przejścia do innego inercyjnego układu odniesienia!



Rysunek 4.6: Tarcza wirująca z relatywistyczną prędkością wokół nieruchomego rdzenia.

Wyobraźmy sobie teraz okrągły pierścień wirujący wokół pionowego trzpienia, jak na rysunku 4.6. Analizując ruch każdego elementu pierścienia osobno stwierdzamy, że w wyniku ruchu stycznego do okręgu powinien on doznać skrócenia Lorentza. Zatem obwód całego pierścienia powinien się skrócić, co wymagałoby zmniejszenia promienia. Mimo relatywistycznego ruchu, spoczywający rdzeń uniemożliwia jednak pierścieniowi zmianę kształtu. Nie może się on zatem lorentzowsko skrócić i z tego powodu paradoksalnie powstaną wewnątrz pierścienia napięcia, mimo że jego kształt nie uległ wcale zmianie. Oczywiście, naprężenia te nie mają nic wspólnego z działaniem siły odśrodkowej. Mają one charakter czysto relatywistyczny. Jednakże w rzeczywistości siła odśrodkowa odgrywa tu najważniejszą rolę. Nie trzeba się w zasadzie martwić, czy pierścień zmniejszy swój promień, tylko czy siła odśrodkowa go nie rozsadzi.

Pytania

- Czy ciała poruszające się ze stałą prędkością doznają wewnętrznych napięć w związku ze skróceniem Lorentza? A ciała obracające się ze stałą prędkością kątową?
- Rozważmy nieruchomą bryłę sztywną. Czy uzasadnione jest twierdzenie, że jeśli w pewnym punkcie bryły przyłożono nagle siłę, to przez bardzo krótki czas od tego momentu bryła zachowywała się jak płyn?

Zadania

- Rozważ paradoks dwóch zderzających się kwadratów omówiony w rozdziale 4.3. Oblicz prędkość, z jaką porusza się punkt pierwszego zetknięcia kwadratów w układzie, w którym jeden z kwadratów spoczywa, a drugi porusza się wzdłuż swojej przekątnej z prędkością v .
- Przyjmując, że w paradoksie klocka wpadającego do otworu, szerokość otworu wynosi L , a prędkość klocka v , oblicz, jak długo znika zapadka w układzie związanym z klockiem.

Rozdział 5

KŁOPOTY Z TEORIA Kwantową

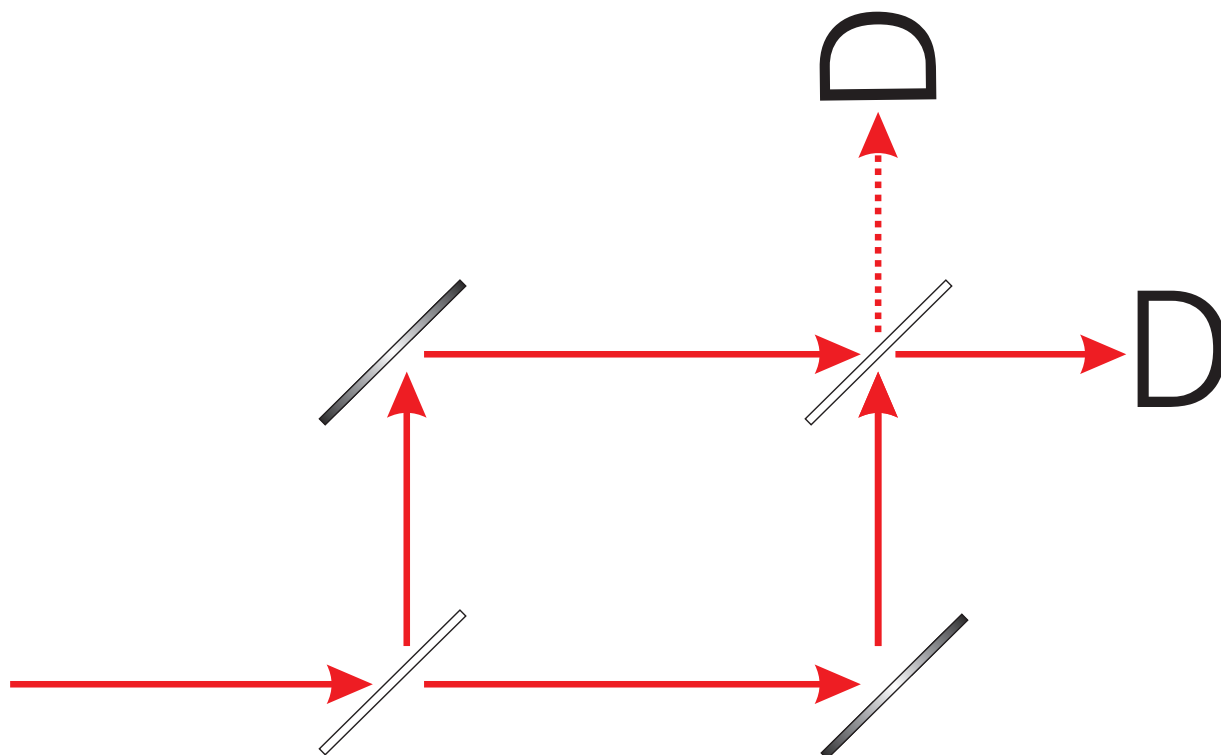
Nadszedł czas pierwszego starcia z teorią kwantową oraz jej związkiem ze szczególną teorią względności. By uniknąć ogólników skupimy się na początek na kwantowych właściwościach światła, a wszystko o czym powiemy będzie wynikać z „niegroźnego” z pozoru faktu istnienia *fotonów*...

5.1 INTERFEROMETR MACHA-ZEHNDERA

Na rysunku 5.1 znajduje się schemat *interferometru Macha-Zehndera*. Układ składa się z dwóch lusterek, dwóch płytek światłodziących, które przepuszczają połowę światła, a połowę odbijają oraz dwóch detektorów światła.

Co się stanie, gdy dolną płytkę oświetlimy z lewej strony strumieniem światła? Oczywiście, część światła odbije się od niej i pójdzie „górną” drogą, a część przeniknie przez płytkę i dalej będzie podróżować „dołem”. Obie wiązki odbijają się następnie od lusterek i natrafiają na kolejną płytkę, na której ponownie się nałożą. Jaki będzie rezultat tej interferencji? Zależy to od szczegółów, o których nie wspomnieliśmy. Zwróćmy uwagę, że światło docierające do górnego detektora może podróżować albo dolną drogą, na której zmuszone jest dwukrotnie przejść przez szklane elementy, albo górną drogą, w próżni. Ze względu na skończoną grubość płytek szklanych wytworzy się zatem niezerowa różnica *dróg optycznych* – światło propagujące się we szkle ma bowiem inną prędkość fazową, niż światło podróżujące w próżni. Starannie dobierając grubość płytek możemy więc sprawić, by interferencja miała charakter destruktywny i światło w całości docierało do dolnego detektora.

Teraz pora na niespodziankę. Jak wiadomo od ponad wieku, strumień światła składa



Rysunek 5.1: Schemat interferometru Macha-Zehndera.

się z niepodzielnych porcji, zwanych *fotonami*. Zastanówmy się zatem, co będzie się działo, gdy płytkę światłodziącą „oświetlimy” pojedynczym fotonem. Do którego detektora foton może dotrzeć po przejściu przez interferometr? Wydawać by się mogło, że foton musi w jakiś sposób „zdecydować się” na jedną z dróg i nie mając z czym interferować będzie równie często wpadał do jednego detektora, co do drugiego, jeśli eksperyment będziemy wielokrotnie powtarzać. Co prawda nie bardzo wiadomo co miałyby decydować o wyborze przez foton tej, a nie innej drogi, ale czy przychodzi nam do głowy inne rozwiązanie? Okazuje się, że musi nam przyjść do głowy inne rozwiązanie, bo nasze wnioski są błędne. W eksperymencie okazuje się, że nawet używając pojedynczych fotonów nie da się „obudzić” górnego detektora. Za każdym razem porcja światła zostanie zarejestrowana w dolnym detektorze. Wygląda to jak efekt interferencyjny, co oznacza, że foton musi jednak z czymś interferować. Ale z czym, z samym sobą? Wygląda na to, że nie ma innego wyjaśnienia. Zatem mając do dyspozycji dwa alternatywne sposoby przebycia interferometru foton zachowuje się tak, jak gdyby podróżował dwiema drogami *jednocześnie*! Obie alternatywne

ścieżki interferują dokładnie w taki sposób, w jaki interferowały dwie fale świetlne rozszczepione na pierwszej płytce światłodzieliącej.

Z tego, co powiedzieliśmy mogłoby wynikać, że z jednego fotonu robią się dwa. Czy oznacza to, że energia nie jest zachowana? Aby to sprawdzić wystarczy postawić dwa detektory tuż za pierwszą płytką światłodzieliącą. Ich zadaniem będzie sprawdzenie którędy „naprawdę” podróżuje foton. I oto znów stanie się coś zadziwiającego: klikać będzie zawsze tylko jeden detektor, czasami górny, a czasami dolny. Obydwa nigdy. Sytuacja wygląda zupełnie tak, jakby foton zorientowawszy się, że jest pod obserwacją postanowił nie siać zgorszenia i zlokalizować się w jednym z detektorów. Gdy natomiast nikt nie patrzy, foton zachowuje się zupełnie tak, jakby podróżował obiema drogami na raz.

Postawmy kolejne prowokacyjne pytanie: co decyduje o tym, który z dwóch detektorów umieszczonych tuż za pierwszą płytką zarejestruje konkretny foton? O fotonach wiemy, że są obiektami niezwykle prostymi – jeśli więc do naszego eksperymentu wykorzystamy światło o ustalonej polaryzacji i długości fali, to każdy z fotonów będzie jednakowy. Co zatem sprawia, że połowa z nich odbija się od płytki, a połowa przez nią przechodzi? Gdyby czynnikiem decydującym była jakaś niepoznana jeszcze wewnętrzna struktura fotonu, coś, co moglibyśmy nazwać *parametrem ukrytym*, to wszystkie fotony odbite powinny być już odfiltrowane, a zatem jednakowe (a przynajmniej mniej „różnorodne”). Jednakże umieszczenie na drodze odbitej wiązki kolejnej płytki światłodzieliącej i pary detektorów tuż za nią ujawnia, że znów dokładnie połowa fotonów się odbija, a połowa przejdzie przez płytkę. Zatem żadnego filtrowania nie ma i nie ma specjalnych podstaw, by mówić o jakiegokolwiek ukrytej strukturze fotonu.

Skoro nie potrafimy znaleźć przyczyny, to pozostaje nam przyznać, że decyzja, który detektor kliknie w konkretnym przypadku jest zupełnie przypadkowa i niczym nieuzasadniona. *Indeterminizm* wyniku tego eksperymentu jest, według doktryn mechaniki kwantowej, fundamentalnym prawem przyrody. Oto, w jak dziwny sposób foton ratuje zasadę zachowania energii.

W formalizmie kwantowomechanicznym „rozdwójony” stan $|\Psi\rangle$ fotonu podróżującego jednocześnie górną i dolną drogą w interferometrze zapisuje się symbolicznie:

$$|\Psi\rangle = |\text{foton przeszedł górą}\rangle + |\text{foton przeszedł dołem}\rangle \quad (5.1)$$

i nazywa *stanem superponowanym* albo po prostu *superpozycją* dwóch możliwości. Z pozoru

nasza kwantowa dygresja nie ma zbyt wiele wspólnego ze szczególną teorią względności, lecz za chwilę przekonamy się, że jednak ma, i to bardzo wiele.

5.2 ZJAWISKO EPR I ZACHWIANIE PRZYCZYNOWOŚCI

Do fotonów jeszcze powrócimy, a tymczasem zajmiemy się słynnym paradoksem Einsteina-Podolskiego-Rosena. Oto jak się on przedstawia. Wyobraźmy sobie nieruchomą, radioaktywną (rozpadającą się) cząstkę, której całkowity, wewnętrzny moment pędu, czyli spin, jest równy zero. Gdyby cząstka była zwykłą kulką, to powiedzielibyśmy po prostu, że się ona nie kręci. Wiemy jednak, że cząstki to nie są zwykłe kulki i dlatego wolimy mówić o zerowym spinie. Z zasady zachowania pędu wynika, że jeśli cząstka ta rozpadnie się na dwie identyczne, mniejsze cząstki, to produkty oddalą się w przeciwnych kierunkach. Oprócz zasady zachowania pędu musi być również spełniona zasada zachowania momentu pędu z której wynika, że jeśli spin poszczególnych produktów rozpadu nie jest równy zero, to zawsze spin pierwszej cząstki musi być skierowany przeciwnie do spinu drugiej. Zgodnie z tym, co wiemy o cząstkach, ich spin nie może być dowolny. Na przykład spin elektronu w pewnym układzie jednostek wynosi $\frac{1}{2}$. Oznacza to, że może on być skierowany w dowolnym kierunku, ale jego wartość musi być dla każdego elektronu taka sama.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że produktami rozpadu są właśnie dwa elektrony. Skoro ich spiny muszą być skierowane przeciwnie, to również dowolna składowa spinu musi mieć różny znak dla obu elektronów. Zatem pomiar składowej spinu, na przykład wzdłuż osi z dla jednego elektronu, da zawsze wynik przeciwny, niż analogiczny pomiar składowej spinu dla drugiego elektronu.

W jaki sposób zapisać stan kwantowy pary elektronów wyprodukowanych w rozpadzie? Są dwie możliwości. Po pierwsze składowa spinu pierwszego elektronu może być skierowana zgodnie z osią z , a składowa spinu drugiego elektronu przeciwnie. Wówczas dwa elektrony byłyby w stanie kwantowym $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$. Jest też druga, odwrotna możliwość w której elektrony są w stanie $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$. Która z alternatyw zostanie w rzeczywistości wybrana? W tym momencie na myśl przychodzi następująca analogia. Gdy zdejmujemy z nóg oba buty i jeden rzucimy w prawo, a drugi w lewo, nie patrząc który poleciał w którą stronę, wydaje się, że para butów będzie w podobnym stanie co para elektronów. Albo prawy but pofruwał w prawo, a lewy w lewo, albo na odwrót. Okazuje się jednak, że sytuacja kwantowa jest diametralnie różna, bowiem podobnie jak w przykładzie z poprzedniego podrozdziału

zrealizowane zostaną obie alternatywy jednocześnie! W przypadku butów, ich skrętności zostały ustalone już w momencie rzucania. W przypadku elektronów, aż do momentu pomiaru kierunki ich spinów nie są określone. Całkowity stan pary elektronów powstałych w rozpadzie jest postaci*:

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2. \quad (5.2)$$

W gruncie rzeczy sytuacja jest bardzo podobna do omówionej w poprzednim podrozdziale. Różnica jest taka, że poprzednio rozważaliśmy stan superponowany pojedynczego fotonu, a teraz mówimy o superpozycji pary elektronów. Zgodnie z doktryną mechaniki kwantowej zanim nie wykonamy pomiaru, oba człony superpozycji są „realizowane” jednocześnie i nie można powiedzieć czy „naprawdę” pierwsza cząstka ma spin skierowany w górę, czy w dół osi z . Bardzo podobny przykład został podany w słynnej pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena, w której autorzy wyciągnęli wniosek, że jeśli mechanika kwantowa jest teorią poprawną i kompletną, to elektrony musiałyby się ze sobą skomunikować dopiero w chwili pomiaru (jeżeli ich spiny mierzone były jednocześnie), aby uniknąć złamania zasady zachowania momentu pędu. Jednakże tego typu komunikacja wymagałaby użycia przez elektrony tajemniczego sygnału poruszającego się nieskończenie szybko, co, patrząc przez pryzmat szczególnej teorii względności, jest dość bolesne. Czy oznacza to, że mechanika kwantowa nie jest teorią kompletną? Einstein uznał, że powyższe rozumowanie tego właśnie dowodzi. My jednak spróbujemy mimo wszystko przyjrzeć się sprawie uważniej, tym bardziej, że pomimo swej niecodzienności mechanika kwantowa jeszcze ani razu, w żadnym eksperymentalnym teście nie zawiodła. Einstein skłaniał się ku tezie, że wynik pomiaru składowej spinu musi być od samego początku zdeterminowany pewnym parametrem ukrytym, którego wciąż nie odkryliśmy, dlatego go nie kontrolujemy. Według niego para elektronów zachowywałaby się jak para butów, o których wspomnieliśmy wcześniej. Jednakże z następnego podrozdziału dowiemy się, że takie rozwiązanie problemu jest niezgodne z rzeczywistością, co można potwierdzić pewnym bardzo przebiegłym eksperymentem.

Einstein nie mógł przełknąć faktu, że zjawisko, o którym pisał, wygląda z punktu widzenia mechaniki kwantowej trochę tak, jak gdyby elektrony wymieniały sygnały ponad-

*Stosujemy zapis symboliczny. W pełni poprawny, kwantowomechaniczny stan dwóch spinów jest postaci $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$, co można wyznaczyć obliczając odpowiednie *współczynniki Clebscha-Gordana*

światłne. Narzuca się pytanie, czy jeśli mechanika kwantowa ma rację, to można zastosować efekt EPR do przesyłania informacji ponadświatlnych pomiędzy osobami dokonującymi pomiarów? Gdyby było to możliwe, wówczas zasady przyczynowości uległyby zachwianiu, o czym przekonaliśmy się już w rozdziale 1.5. Osoba dokonująca pomiaru spinu dowiaduje się jednocześnie, jaki będzie wynik analogicznego pomiaru na drugim elektronie mimo, że ten może znajdować się już bardzo daleko, a w przeciwieństwie do chiralności pary butów wynik nie był przed pomiarem określony. Gdybyśmy więc mogli wpływać na uzyskiwane wyniki, to otworzyłoby nam to drogę do natychmiastowej komunikacji na odległość. Jednakże zgodnie z tym, co mówi mechanika kwantowa, wynik naszego pomiaru jest zupełnie przypadkowy. Nie dość, że nie możemy na niego w żaden sposób wpływać, to nie możemy go w ogólności nawet przewidzieć! Dokładnie tak, jak było w poprzednim rozdziale z fotonami padającymi na płytkę półprzepuszczalną. Co z tego, że natychmiast dowiadujemy się o rezultacie odległego pomiaru, skoro nie potrafimy wpływać na jego wynik? Nie potrafimy zmusić żadnego z elektronów znajdujących się w łącznym stanie (5.1) do tego by jego spin był skierowany tak jak nam się podoba. Dopiero gdyby to nam się udało, byłibyśmy w stanie przysyłać informacje przy pomocy „zjawiska EPR”. Natura pomyślała to naprawdę niezwykle chytrze. Choć mamy w ręku pewne nielocalne (czyli dokonujące się na odległość) zjawisko, nie potrafimy go użyć do kontrolowania obiektów na odległość ze względu na jego indeterminizm (fundamentalną nieokreśloność wyników pomiarów). Pytanie czy to tylko przypadek, złośliwe zrządzenie losu, czy też konsekwencja jakichś bardziej fundamentalnych praw? Do tego intrygującego pytania jeszcze powrócimy.

5.3 NIERÓWNOŚCI BELLA

Przedziwna, kwantowomechaniczna zasada mówiąca, że w ogólności wynik pojedynczego pomiaru nie jest przez nic określony, budzi sprzeciw u większości osób, które ją po raz pierwszy poznają. Nic dziwnego. Słyszysz się na przykład: „Ja w to nigdy nie uwierzę! Na pewno istnieje coś, co sprawia, że foton odbija się lub przechodzi przez płytkę światłodzielącą. Przecież indeterminizm to absurd!”. Powstało nawet wiele konkurencyjnych teorii używających zamiast słowa „coś”, określenia parametr ukryty. Teorie te mówią: istnieją pewne, na razie nieznane (ukryte), parametry, które determinują wyniki pojedynczych pomiarów. Na przykład w eksperymencie z fotonem przechodzącym przez płytkę światłodzielącą może wydawać się, że w rzeczywistości o tym, czy foton odbije się, czy przejdzie decyduje właśnie

jakiś ukryty parametr. Podobnie na paradoks EPR patrzył Einstein. Twierdziłby on, że w momencie wytworzenia pary elektronów, ich spiny są już określone. Określone przez jakiś niepoznany dotąd, ukryty parametr.

Sytuacja radykalnie się zmieniła, gdy w 1964 roku ukazała się praca Bella zawierająca słynne nierówności nazwane później jego nazwiskiem. Dzięki nim, pojawiła się możliwość eksperymentalnego sprawdzenia, czy ukryte parametry istnieją, czy też nie. Aby przedstawić ideę Bella, powróćmy do analizy paradoksu EPR i przyjmijmy, że elektrony w chwili emisji ustalają między sobą parametry: „ty bierzesz spin w górę, ja biorę spin w dół i lecimy!”. Załóżmy, że obie cząstki charakteryzuje parametr (lub zestaw parametrów) λ , określający kierunek spinu obu elektronów. A jaka jest natura tych parametrów? Nie mam pojęcia i nic mnie to nie obchodzi – mówi Bell. Jeżeli ukryte parametry rzeczywiście istnieją, to prędzej czy później zostaną odkryte, a na razie po prostu zakładam, że jakieś dziwne parametry nieznanej natury istnieją i decydują o wynikach wszystkich pomiarów.

W eksperymencie myślowym EPR użyliśmy dwóch urządzeń mierzących spin wzdłuż tych samych kierunków (wzdłuż osi z). Nic jednak nie zabrania nam ich zmienić. Możemy przecież urządzenia mierzące rzut spinu ustawić na pomiar różnych składowych momentu pędu i zobaczyć jak wpłynie to na wyniki. Jeśli chcemy ukrytych parametrów, to musimy przyjąć, że determinują one wynik każdego eksperymentu jaki przyjdzie nam do głowy wykonać (czyli jak byśmy nie ustawili detektorów, wynik musi być zdeterminowany parametrem λ). Wynik każdego eksperymentu może być tylko: „w górę” albo „w dół”. Trzeciego wyjścia być nie może. Jeżeli w wyniku pomiaru okaże się, że spin jest skierowany „w górę”, to za wynik eksperymentu przyjmujemy $+1$, a jeśli nie, to -1 . Potem możemy wykonać sto lub więcej eksperymentów i obliczyć jaki jest średni wynik. Jeśli wyjdzie on zero, to znaczy, że tak samo często spin trafia się skierowany „w górę” jak i „w dół”. Średnia może być też dodatnia lub ujemna. Domyślamy się, co to oznacza. W pierwszym przypadku spin będzie częściej ustawiony „w górę”, a w drugim częściej „w dół”. Weźmy sobie więc dwa detektory i jeden ustawmy w pewnej orientacji $\mathbf{a}$, a drugi w orientacji $\mathbf{b}$. Następnie sprawdźmy jakie są wyniki pomiarów spinu dla obu cząstek. Oznaczmy przez $A_{\mathbf{a}}(\lambda)$ wynik eksperymentu na pierwszym elektronie, a przez $B_{\mathbf{b}}(\lambda)$ na drugim. Jak widać, wyniki (mogące jedynie przyjąć wartości ± 1) zależą tylko od ustawienia detektorów i ukrytego parametru. Co dalej? Powiedzmy sobie: te ukryte parametry, których nie znamy, nie mogą być również przez nas nijak kontrolowane. Więc tak naprawdę, przypisywane są one elektronom losowo (w zasadzie, w naszej teorii musi istnieć jakiś czynnik, który decyduje o tym, jaki parametr

zostaje w danym rozpadzie przypisany, ale my go nie potrafimy kontrolować, więc wychodzi na jedno).

Oznaczmy zbiór wszystkich możliwych parametrów przez Λ . Żeby mieć pełną ogólność, możemy dopuścić możliwość, że niektóre parametry trafiają się częściej, a inne rzadziej, więc określamy jakiś nieznany rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze wszystkich parametrów $p(\lambda)$. Im większa wartość $p(\lambda)$, tym częściej będzie trafiał się parametr λ . Suma wszystkich prawdopodobieństw musi być równa jedności, tzn. $\int d\lambda p(\lambda) = 1$. Skoro już wszystko to ustaliliśmy, przystąpmy do rachunków. Obliczmy najpierw, jaki jest średni iloczyn wyników otrzymanych dla obu cząstek:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) A_{\mathbf{a}}(\lambda) B_{\mathbf{b}}(\lambda). \quad (5.3)$$

Dodajmy tu istotną uwagę: powyższy wzór kamoufluje pewne ważne założenie. Mianowicie takie, że wyniki obu pomiarów są niezależne. Innymi słowy, pomiary dokonane na odległych cząstkach nie mają na siebie wpływu (założenie to nazywa się postulatem lokalności). Formalne zastosowanie tego założenia polega na przyjęciu, że wynik pomiaru spinów może być zapisany w postaci iloczynu wyników dla pierwszego i drugiego elektronu osobno (to wcale nie jest takie oczywiste i po prostu zakładamy, że tak jest). Skorzystamy teraz z elementarnego twierdzenia całkowego: $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$. Możemy dokonać serii pomiarów przy pewnych ustawieniach detektorów i obliczyć wartość średnią, następnie powtórzyć procedurę zmieniając jeden z kierunków, a na końcu odjąć od siebie otrzymane wyniki i wziąć wartość bezwzględną. Otrzymamy wówczas:

$$|E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq \int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) |A_{\mathbf{a}'}(\lambda) B_{\mathbf{b}}(\lambda) - A_{\mathbf{a}'}(\lambda) B_{\mathbf{b}'}(\lambda)|, \quad (5.4)$$

a jak się uważniej przyjrzeć, to się okaże, że prawa strona może być również zapisana w sprytny sposób:

$$\int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) |A_{\mathbf{a}'}| |B_{\mathbf{b}}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}'}) - B_{\mathbf{b}'}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}})|. \quad (5.5)$$

Znak $\pm$ możemy sobie wybrać na końcu jaki nam się spodoba. Dla prostoty pominęliśmy w zapisie zależność wyników od parametru λ . Wiemy, że dla każdego λ mamy $|A_{\mathbf{a}'}(\lambda)| = 1$. Zatem ostatnie wyrażenie równa się po prostu:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) |B_{\mathbf{b}}(1 \pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'}) - B_{\mathbf{b}'}(1 \pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}})| \leq \\
& \leq \int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) \left| |B_{\mathbf{b}}|(1 \pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'}) + |B_{\mathbf{b}'}|(1 \pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}}) \right| = \\
& = \int_{\Lambda} d\lambda p(\lambda) \left| 2 \pm (A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'} + A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}}) \right| = 2 \pm (E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b})). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

W wyniku tych wszystkich zawiłych (choć przyznacie, niezbyt wyrafinowanych) rachunków, dostajemy nierówność:

$$|E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \pm (E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b})), \tag{5.7}$$

a z tego już łatwo otrzymujemy to, co nazywa się właśnie *nierównością Bella* (wystarczy sprytnie dobrać znaki: raz plus, a raz minus w powyższym wyrażeniu):

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') \leq 2, \tag{5.8}$$

gdzie

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \tag{5.9}$$

Chyba nikt nie spodziewa się, że ten prosty wynik może tak wiele znaczyć. Zatem czeka Nas spora niespodzianka. Okazuje się (te rachunki sobie już darujemy), że jeśli zapytać mechanikę kwantową, jaka jest wartość kombinacji S dla pewnych szczególnych ustawień detektorów, to okaże się, że możemy dostać wynik nawet $S = 2\sqrt{2}$, co zdecydowanie łamie nierówność Bella. Mamy nareszcie to, na co czekaliśmy: znaleźliśmy możliwość eksperymentalnej weryfikacji przyjętych założeń (determinizmu i lokalności) w naszym modelu rzeczywistości. Wystarczy w odpowiedni sposób ustawić detektory, zmierzyć przy ich pomocy spiny wielu par elektronów, obliczyć wartości średnie i utworzyć z nich kombinację S . Jeżeli otrzymany wynik przekroczy wartość 2 (jak to przewiduje mechanika kwantowa), to będzie to bezpośredni dowód nieadekwatności przyjętych założeń do badanej sytuacji fizycznej! Jaki jest werdykt? Eksperymenty badające nierówności Bella (w nieco zmienionej

formie, przystosowanej do możliwości praktycznych) zostały już wykonane. Jak dotąd za każdym razem, ogłaszano jednogłośnie werdykt na korzyść mechaniki kwantowej: nierówności Bella są łamane! Cóż może to oznaczać? Na pewno tyle, że przyjęty przez nas ogólny model lokalnych teorii parametrów ukrytych nie jest poprawnym opisem praw przyrody. Wydaje się, że nic sobie ona nie robi z naszych zdroworozsądkowych oczekiwań.

Pytania

- Czy łamanie nierówności Bella jest sprzeczne z doktrynami szczególnej teorii względności?
- Czy każde zjawisko, które spełnia nierówności Bella może zostać opisane deterministyczną teorią?
- Czy każde zjawisko, które łamie nierówności Bella musi być uznane za niedeterministyczne?
- Czy każde zjawisko, które łamie nierówności Bella musi być uznane za nielocalne?

Zadania

- Paweł i Gaweł postanowili zagrać w grę strategiczną. Reguły gry ustalili następujące. Każdy z nich musi udać się do osobnego pomieszczenia i w równych odstępach czasu, poczynawszy od ustalonej godziny, wykonać serię n rzutów monetą zapisując wyniki. Obok każdego wyniku O lub R każdy z nich musi dopisać jedną z dwóch liczb 1 lub -1 wybraną zgodnie z dowolnie przyjętym algorytmem. Przed rozpoczęciem serii rzutów Paweł i Gaweł mogą się naradzić co do stosowanego przez każdego z nich algorytmu, ale w trakcie wykonywania serii nie wolno im się już komunikować. Po zakończeniu wszystkich n rzutów spotykają się ponownie i konfrontują otrzymane wyniki. Wyszukują na swoich listach wyników takie rzuty monetą, w których obydwaj otrzymali jednocześnie wynik O i dla tego podzbioru serii n obliczają średni iloczyn E_{OO} liczb, które każdy z nich dopisał przy danym rzucie. Następnie powtarzają obliczenia dla rzutów, w których obaj otrzymali R (E_{RR}), potem to samo dla rzutów, w których Paweł otrzymał O , a Gaweł R (E_{OR}) i na końcu odwrotnie (E_{RO}).

Na koniec trzy pierwsze średnie do siebie dodają, a czwartą odejmują otrzymując wynik $S = E_{OO} + E_{RR} + E_{OR} - E_{RO}$. Celem gry jest znalezienie takiej strategii dopisywania liczb przy każdym wyniku rzutu, żeby dla bardzo dużych n zachodziło $S > 2$ lub $S < -2$. W jaki sposób można pomóc Pawłowi i Gawłowi w odniesieniu zwycięstwa?

- Wyznacz nierówność Bella w przypadku, gdy możliwe wyniki pomiarów $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ wynoszą nie ± 1 , lecz 0 lub 1.
- Kwantowomechaniczna funkcja korelacji polaryzacyjnego stanu pary fotonów wynosi $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Podaj schemat pomiaru polaryzacji par fotonów, który pozwala złamać nierówność Bella (5.8).

Rozdział 6

ŚWIATŁO

Z wycieczki po świecie mechaniki kwantowej powracamy do teorii względności. W tym rozdziale opiszemy kilka efektów relatywistycznych związanych ze światłem. Oprócz słynnego efektu Dopplera opowiemy także o tym, jak poruszający się ośrodek ciągnie za sobą propagujące się w nim światło oraz sprawdzimy, czy to prawda, że kąt padania równy jest kątowi odbicia.

6.1 RELATYWISTYCZNY EFEKT DOPPLERA

Zacniemy od relatywistycznego *efektu Dopplera*, o którym każdy z Was zapewne słyszał. Jeżeli światło emitowane jest przez ruchome źródło, to prędkość fali świetlnej nie zależy od prędkości źródła. Natomiast od prędkości źródła zależy częstość emitowanej fali. Stąd bierze się właśnie słynne „przesunięcie ku czerwieni” widma oddalających się gwiazd i galaktyk. Niektórzy twierdzą również, że z tego samego powodu światła zbliżającego się samochodu są białe, ale oddalającego się są już czerwone.

Rozważmy zatem źródło, które w swoim spoczynkowym układzie inercjalnym emituje we wszystkich kierunkach światło o długości fali λ_0 . Niech w innym inercjalnym układzie odniesienia źródło to porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ o składowych radialnej i transversalnej (v_r, v_φ) . Naszym celem będzie znalezienie długości fali światła λ w tym układzie.

Jak wiadomo, światło nie jest niczym innym jak propagującą się falą elektromagnetyczną. Powiedzmy, że dwa kolejne węzły takiej fali zostały wyemitowane w chwilach t_A^e i t_B^e , gdy źródło znajdowało się w odległościach r_A i r_B od obserwatora. Chwile odbioru światła w punkcie $r = 0$ wynoszą: $t_A^o = t_A^e + \frac{r_A}{c}$ i $t_B^o = t_B^e + \frac{r_B}{c}$. Znajdujemy stąd zarejestrowaną

długość fali:

$$\begin{aligned}\lambda &= c(t_B^o - t_A^o) = c(t_B^e - t_A^e) \left(1 + \frac{r_B - r_A}{c(t_B^e - t_A^e)}\right) = \frac{c(t_B^e - t_A^e)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 + \frac{v^r}{c}\right) = \\ &= \lambda_0 \frac{1 + \frac{v^r}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\end{aligned}\tag{6.1}$$

gdzie czasy primowane są mierzone w układzie inercyjnym chwilowo związanym ze źródłem, a v^r jest radialną składową prędkości źródła względem obserwatora. Wzór, który otrzymaliśmy różni się od nierelatywistycznego wzoru na przesunięcie Dopplera tradycyjnie o czynnik $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Czynnik ten jest jednak bardzo ważny, bo ujawnia możliwość obserwowania przesunięcia Dopplera dla źródła, które się nie oddala, tylko obraca wokół obserwatora. Jak widać, długości fal elektromagnetycznych emitowanych przez oddalające się źródła stają się większe (czyli światło jest bardziej czerwone), podczas gdy źródła zbliżające się emitują światło o mniejszej długości (przesunięcie ku fioletowi). To ostatnie stwierdzenie nie jest jednak prawdziwe w ogólności. Przyjrzyjmy się wzorowi (6.1) – wynika z niego, że źródło zbliżające się do obserwatora po pewnym spiralnym torze, może nie doznawać przesunięcia ku fioletowi, a nawet być przesunięte ku czerwieni! A ktoś mógłby pomyśleć, że efekt Dopplera niczym go już nie zdziwi.

6.2 UNOSZENIE ŚWIATŁA PRZEZ RUCHOMY OŚRODEK

Przed nami kolejna niespodzianka. Zawsze, gdy mówi się, że prędkość światła wynosi c , należy dodać sakramentalne „w próżni”. Wiadomo bowiem, że w ośrodkach takich jak szkło, czy woda, prędkość światła jest mniejsza niż c i nic nie stoi nawet na przeszkodzie, żeby w tego typu ośrodku od światła szybciej poruszał się na przykład elektron. Prędkość fotonu w takim materiale wynosi z grubsza $\frac{c}{n}$, gdzie $n \geq 1$ jest pewnym współczynnikiem charakteryzującym ośrodek. To dla ośrodka nieruchomego. A jaka jest prędkość światła w ośrodku o współczynniku n i poruszającym się z prędkością v ? Czy również wynosi $\frac{c}{n}$? Nic podobnego.

Aby dostać poprawną prędkość światła w poruszającym się ośrodku, należy po prostu przetransformować prędkość $\frac{c}{n}$ z układu, w którym ośrodek spoczywa do układu, w którym

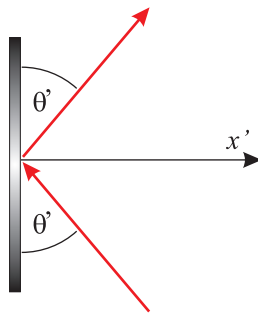
się porusza. Jeżeli w układzie ośrodka światło propaguje się w kierunku osi x i chcemy odpowiedzieć na pytanie jaka będzie prędkość światła w układzie, w którym ośrodek porusza się z prędkością V wzdłuż osi $-x$, wystarczy zastosować wzór (2.16):

$$v' = \frac{\frac{c}{n} - V}{1 - \frac{V}{nc}} = c \frac{c - nV}{nc - V}. \quad (6.2)$$

Oznacza to ni mniej ni więcej, tylko że jeśli ośrodek porusza się z prędkością $-\frac{c}{n}$, to w tym układzie światło spoczywa. Kto by się spodziewał? Efekt wygląda dokładnie tak, jakby ośrodek „ciągnął” za sobą światło lub je „unosił”. Dokładnie w taki sam sposób, w jaki płynąca rzeka unosi pływającą po niej kaczkę.

6.3 ODBICIE ŚWIATŁA OD LUSTRA

Wiemy, że światło odbija się od spoczywającego lustra pod takim samym kątem, pod jakim pada. Dowodzi tego następujące rozumowanie. Długość fali odbitego światła jest taka sama, co długość fali światła padającego, zatem z zasady zachowania pędu (składowej równoległej do powierzchni lustra) otrzymujemy równość kątów padania i odbicia. Wiemy bowiem, że pęd światła zależy od długości fali. Jednak poruszające się lustro może zmienić częstość odbijanego światła. Dlatego jeśli w odbiciu ma być zachowana składowa pędu równoległa do powierzchni lustra, kąt odbicia musi różnić się od kąta padania. Nie poznaliśmy jeszcze zasad relatywistycznej dynamiki, ale związek pomiędzy rozważanymi kątami można znaleźć wyłącznie przy użyciu tego co wiemy już teraz.



Rysunek 6.1: Odbicie światła od nieruchomego lustra.

Rozważmy (primowany) układ współrzędnych, w którym oś x' jest prostopadła do powierzchni nieruchomego lustra – rysunek 6.1. W tym układzie częstość światła nie zmienia

się przy odbiciu, więc kąt padania jest równy kątowi odbicia, θ' . Oznacza to, że składowa x' prędkości fali padającej jest równa $v_p^x = -c \sin \theta'$, a fali odbitej $v_o^x = c \sin \theta'$. Odpowiednie składowe prędkości w układzie, w którym lustro porusza się z prędkością V wzdłuż osi x można łatwo znaleźć korzystając ze wzoru odwrotnego do (2.16):

$$v_p^x = \frac{-c \sin \theta' + V}{1 - \frac{V}{c} \sin \theta'} = -c \sin \theta_p \quad (6.3)$$

$$v_o^x = \frac{c \sin \theta' + V}{1 + \frac{V}{c} \sin \theta'} = c \sin \theta_o,$$

gdzie θ_p jest kątem padania światła, a θ_o jest kątem odbicia w układzie, w którym lustro porusza się z prędkością V . Widzimy, że dla $V = 0$ oba kąty są równe: $\theta_p = \theta_o$. Aby znaleźć zależność jednego kąta od drugiego, pozbywamy się θ' z równań (6.3) otrzymując związek:

$$\sin \theta_o = \sin \theta_p \frac{1 + 2\frac{V}{c} \sin^{-1} \theta_p + \frac{V^2}{c^2}}{1 + 2\frac{V}{c} \sin \theta_p + \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6.4)$$

Zwróćmy uwagę, że dla lustra, którego prędkość dąży do prędkości światła mamy:

$$\lim_{V \rightarrow c} \sin \theta_o = 1, \quad (6.5)$$

czyli θ_o dąży do $\frac{\pi}{2}$. Łatwo jest „machając rękami” uzasadnić, dlaczego kąt odbicia jest większy niż kąt padania. Otóż światło padające pod jakimś kątem posiada pewną składową pędu równoległą do powierzchni lustra. W wyniku odbicia składowa ta nie może się zmienić. Jednakże, gdy lustro porusza się tak jak w omawianym przykładzie, to podczas odbicia skraca się długość fali światła, czyli zwiększa się jego pęd. Aby skompensować tę zmianę pędu światło musi odbić się pod większym kątem dzięki czemu pęd „poprzeczny” udaje się zachować. Gdy prędkość lustra jest niewielka w porównaniu z prędkością światła $V \ll c$, wówczas efekt Dopplera prawie nie występuje i kąt padania jest niemal równy kątowi odbicia.

Pytania

- Czy źródło światła, którego odległość od inercyjnego obserwatora stale się zwiększa jest zawsze charakteryzowana widmem przesuniętym ku czerwieni?

- Czy źródło światła, którego odległość od inercjalnego obserwatora stale się zmniejsza jest zawsze charakteryzowana widmem przesuniętym ku fioletowi?
- Czy kąt padania światła na lustro jest zawsze równy kątowi odbicia?
- Czy prędkość światła w rzece względem brzegu rzeki zależy od prędkości wody?

Zadania

- Kierowca samochodu zatrzymany przez policjanta za przejechanie przez skrzyżowanie na czerwonym świetle tłumaczy się, że w wyniku efektu Dopplera światło czerwone wydało mu się zielone. Dopuszczalna prędkość w terenie zabudowanym to $0.5c$. Ile punktów karnych z tytułu nadmiernej prędkości grozi kierowcy, jeśli za każde nadprogramowe $0.01c$ dostaje się jeden punkt karny?
- Źródło światła porusza się względem spoczywającego obserwatora wzdłuż krzywoliniowego toru z pewną stałą co do wartości prędkością w taki sposób, że widmo światła rejestrowane przez obserwatora jest dokładnie takie, jak dla źródła spoczywającego. Wyznacz możliwe tory ruchu źródła.

Rozdział 7

POZORNE DEFORMACJE RUCHOMYCH OBIEKTÓW

Obiekty poruszające się z dużymi prędkościami ulegają skróceniu Lorentza. Wydawać by się mogło, że lecąca szybko na miotle Baba Jaga będzie wyglądała na krótszą, niż w spoczynku. Nic podobnego! Baba Jaga będzie rzeczywiście krótsza, ale jej wygląd będzie zupełnie inny. Brzmi od rzeczy? Problem polega na tym, że to, co widzimy, to światło docierające do naszych oczu od poruszającego się obiektu. A ponieważ rozważany obiekt sam porusza się z prędkościami porównywalnymi z prędkością światła, jego obraz będzie bardzo zniekształcony. W tym rozdziale zajmiemy się właśnie tym zagadnieniem. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jak wyglądają proste, geometryczne obiekty w relatywistycznym ruchu.

7.1 OKRĄG W KSZTAŁCIE KIEŁBASY

Rozpocniemy od przestudiowania obrazu okręgu poruszającego się wzdłuż swojej średnicy. Wiemy już z poprzednich rozdziałów, że rzeczywistym kształtem takiego „okręgu” jest elipsa. Musimy się teraz zastanowić, w jaki sposób określić jego wygląd, czyli jak wyglądałaby fotografia ruchomego okręgu.

Przed wszystkim będziemy potrzebować równania określającego rzeczywiste położenie punktów na okręgu. W jego układzie spoczynkowym może ono być postaci $x'^2 + y'^2 = R^2$, $z' = d$. Stosując transformację Lorentza bez trudu znajdujemy równanie określające kształt „okręgu” w układzie, w którym porusza się on wzdłuż osi x z prędkością V :

$$\frac{(x - Vt)^2}{1 - V^2/c^2} + y^2 = R^2, \quad z = d. \quad (7.1)$$

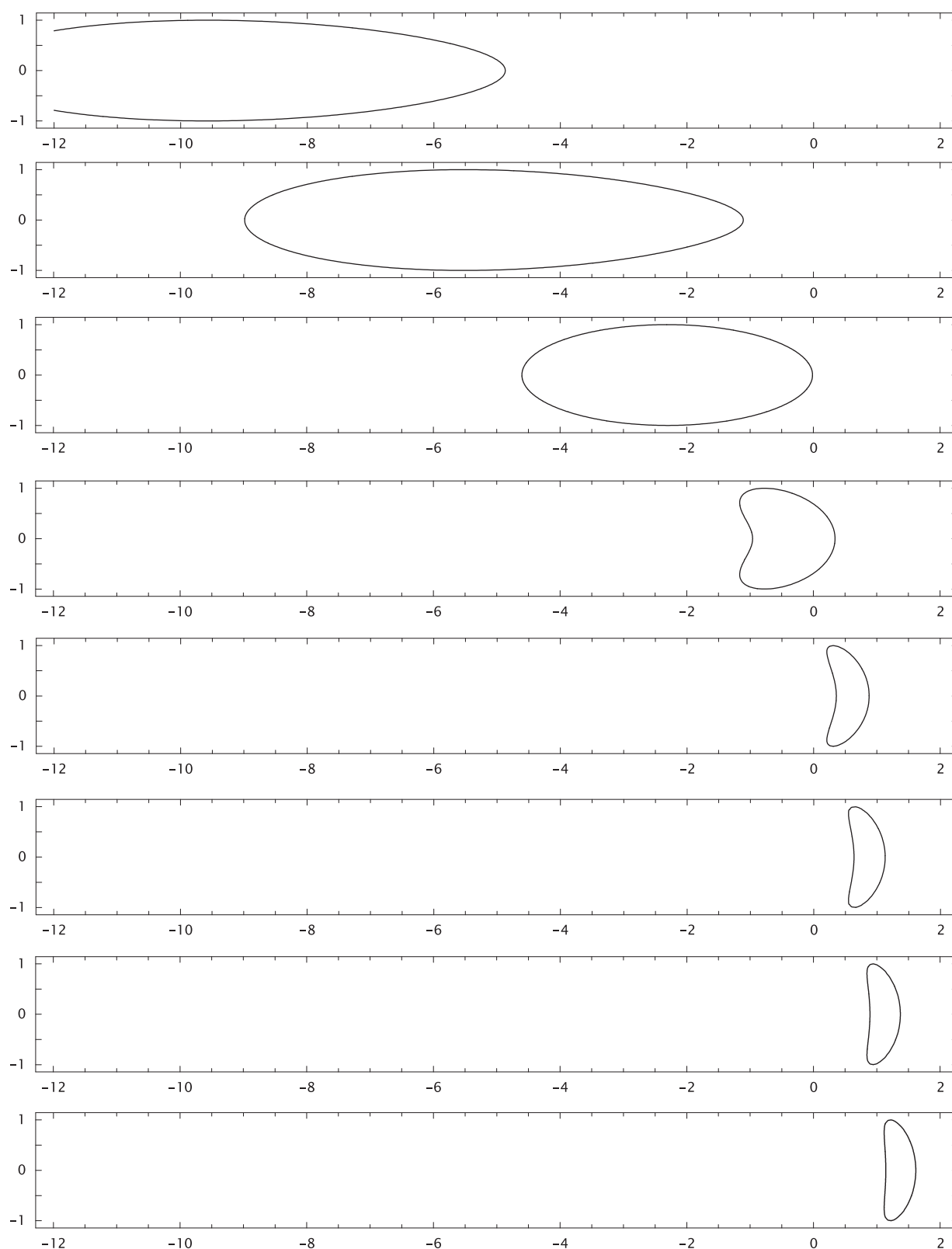
Rozważmy teraz promienie światła emitowane przez ten okrąg, które dotarły do aparatu fotograficznego umieszczonego w początku układu współrzędnych w chwili t_o . Ich „równanie ruchu” jest postaci: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2(t_o - t)^2$. Jeżeli potraktujemy nasze równania jako układ, to jego rozwiązaniem będzie zbiór zdarzeń w czasoprzestrzeni, w których zostało wyemitowane światło docierające do aparatu. Z układu tego należy w pierwszej kolejności wyeliminować t , gdyż nie interesują nas chwile emisji, tylko punkty, z których światło zostało wyemitowane. Wyznaczając t z drugiego równania i wstawiając do (7.1) dostajemy równanie czwartego stopnia:

$$\frac{(x - Vt_o + \frac{V}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + d^2})^2}{1 - V^2/c^2} + y^2 = R^2. \quad (7.2)$$

Rozwiązaniem równania jest krzywa czwartego stopnia, której kształt wyznaczaliśmy numerycznie – rysunek 7.1. Wynik jest zaiste piorunujący. Na rysunku znajdują się zbiory punktów, z których emitowane było światło docierające do aparatu w określonych chwilach. Przyjeliśmy, że okrąg o promieniu $R = 1$ poruszał się z prędkością $V = 0.9c$, a jego odległość od płaszczyzny (x, y) wynosiła $d = \frac{1}{2}$. Z rysunku wynika, że zbliżający się okrąg wygląda na niesłychanie *wydłużony*, a oddalający się przypomina kształtem kielbasę.

Wykonane fotografie będą nieco różnić się od obrazów znajdujących się na rysunku 7.1 jeśli aparat będzie ustawiony pod pewnym kątem do płaszczyzny ruchu okręgu. W związku z tym, obraz ulegnie dodatkowemu „ściśnięciu” wzdłuż osi x . Okaże się, że po uwzględnieniu tego ściśnięcia, elipsa w chwili $t_o = 0$ będzie wyglądać jak idealny okrąg, o ile aparat będzie „celował” w jej środek. Ponieważ jednak ludzkie oko (i mózg) posiada zdolność dostrzegania głębi obrazu, efekt ten będzie w zasadzie „sztuczny” również dlatego, że widmo światła różnych punktów okręgu będzie przesunięte dopplerowsko w różny sposób. Punkty zbliżającego się okręgu, które są bardziej odległe od obserwatora będą wydawać się niebieskawe, a te bliżej czerwone. Gdyby natomiast poruszający się okrąg został oświetlony od tyłu, jego cień byłby rzeczywiście okrągły w chwili $t_o = 0$.

Podobną analizę możemy powtórzyć dla dowolnego płaskiego ciała, którego kształt w spoczynku opisuje równanie postaci $F(x, y) = 0$ i poruszającego się w swej płaszczyźnie z

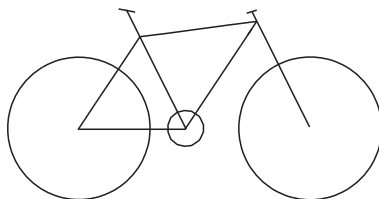


Rysunek 7.1: Punkty poruszającego się okręgu, z których dobiega światło do aparatu fotograficznego. „Zdjęcia” robione były w równych odstępach czasu, prędkość okręgu wynosiła $0.9c$, a odległość aparatu od płaszczyzny ruchu równa była $\frac{R}{2}$.

prędkością v wzdłuż osi x . Dla takiego kształtu, pozorny obraz zarejestrowany przez aparat fotograficzny w chwili t_o jest dany równaniem:

$$F\left(\frac{x - \frac{v}{c}(ct_o - \sqrt{x^2 + y^2 + d^2})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y\right) = 0. \quad (7.3)$$

Dla urozmaicenia, przeanalizujmy jako przykład kontur przedstawiający rower [4] – rysunek 7.2.



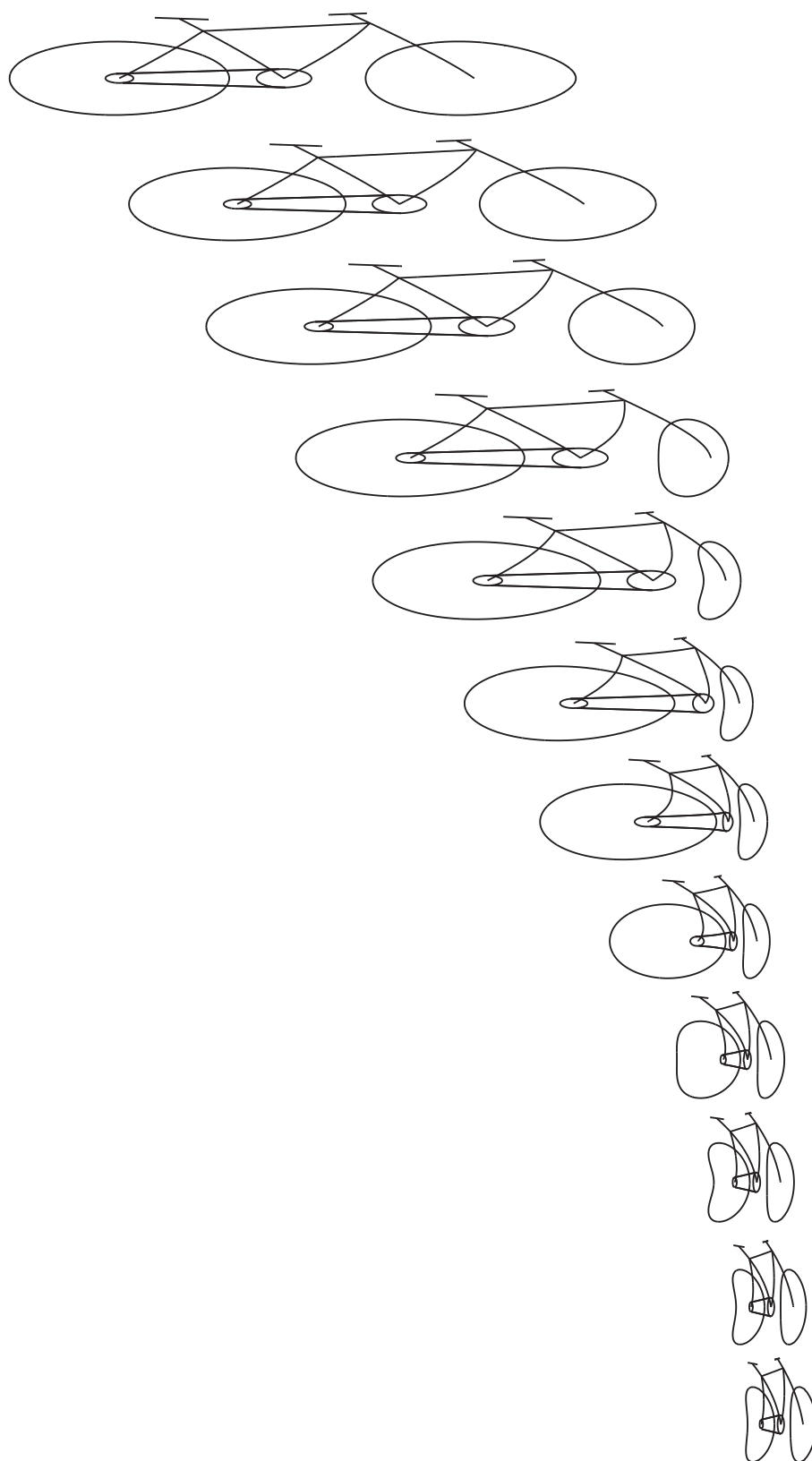
Rysunek 7.2: Spoczywający rower.

Analiza nie jest zbyt skomplikowana, bo rower składa się wyłącznie z odcinków i okręgów, opisywanych elementarnymi równaniami. Dlatego posługując się wzorem (7.3) możemy przeanalizować wygląd każdego z tych elementów osobno, a następnie złożyć otrzymane kształty w całość. Numeryczne rozwiązania tego równania znajdują się na rysunku 7.3. Są na nim „fotografie” roweru jadącego z prędkością $v = 0.8c$ wykonane z odległości równej średnicy koła roweru w kilku równych odstępach czasu. Przyznacie, że zdjęcia są niezwykle zaskakujące. Na trzecim od góry zdjęciu, środek przejeżdżającego roweru akurat mijał obserwatora. Wcześniejsze zdjęcia ukazują rower zbliżający się, podczas gdy na kolejnych rower już oddala się od aparatu.

7.2 KULA W KSZTAŁCIE KULI

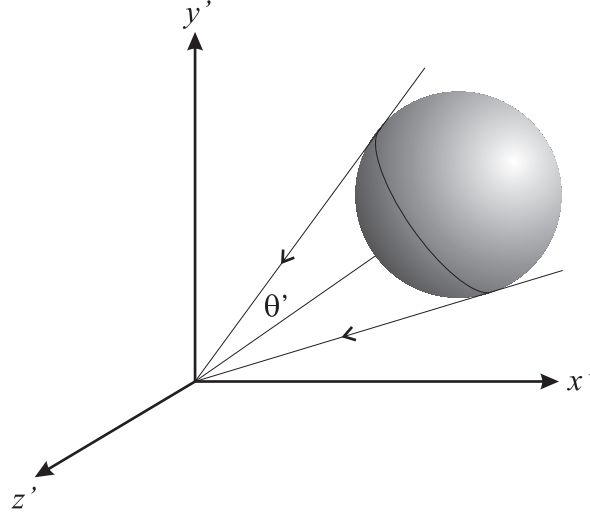
Okazuje się, że bardzo interesującymi własnościami wizualnymi może poszczycić się poruszająca się kula. Przekonamy się za chwilę, że niezależnie od kierunku i wartości prędkości, cień rzucany przez nią na płaszczyznę prostopadłą do kierunku padania promieni jest zawsze okrągły.

Rozważmy dowolny, spoczynkowy układ kuli – rysunek 7.4. W tym układzie „obwódka” kuli jest okrągła. Możemy to wyrazić równaniem opisującym położenie punktów na ob-



Rysunek 7.3: Fotografie roweru jadącego z prędkością $v = 0.8c$ wykonane z odległości równej średnicy koła roweru w kilku równych odstępach czasu. W chwili wykonywania trzeciej fotografii środek roweru właśnie mijał aparat fotograficzny.

wiedni kuli, z których do obserwatora docierają promienie światła w określonej chwili. Przykładowy bieg tych promieni jest przedstawiony na rysunku 7.4.



Rysunek 7.4: Kula widziana w dowolnym spoczynkowym układzie odniesienia.

W układzie spoczynkowym kuli oznaczmy wektor skierowany od obserwatora do środka kuli przez $\mathbf{a}'$, natomiast wektor od obserwatora do punktu w którym promień światła rozpoczyna swój bieg przez $\mathbf{r}'$. Kąt pomiędzy $\mathbf{a}'$ oraz $\mathbf{r}'$ oznaczmy przez θ' . Wówczas równanie stożka świetlnego:

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}' = x' a'^x + y' a'^y + z' a'^z = r' \cos \theta' = -ct' \cos \theta' \quad (7.4)$$

określa bieg promieni wyemitowanych w chwili $t' < 0$, które dotarły do obserwatora w chwili $t'_o = 0$. Analogiczne równanie promieni docierających do obserwatora poruszającego się z prędkością V wzdłuż osi x w chwili, gdy obserwatorzy mijają się jest postaci:

$$\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} a'^x + y a'^y + z a'^z = -c \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cos \theta'. \quad (7.5)$$

Otrzymaliśmy je dokonując transformacji Lorentza współrzędnych i czasu występujących w poprzednim równaniu. Po pomnożeniu obu stron przez dowolną stałą N i drobnych przekształceniach dostajemy stąd:

$$x \frac{a'^x - V \cos \theta' / c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} N + y N a'^y + z N a'^z = -ct N \frac{\cos \theta' - V a'^x / c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (7.6)$$

Przyjrzyjmy się uważnie otrzymanemu wyrażeniu – jest ono tej samej postaci, co równanie (7.4), tylko zapisane przy użyciu współrzędnych nieprimowanych oraz z innym wersorem i kątem. Po podstawieniu

$$\begin{aligned} a^x &= N \frac{a'^x - V \cos \theta' / c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ a^y &= N a'^y \\ a^z &= N a'^z \\ \cos \theta &= N \frac{\cos \theta' - V a'^x / c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

i wybraniu N w taki sposób, by długość wersora $\mathbf{a}$ wynosiła 1, otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = x a^x + y a^y + z a^z = -ct \cos \theta, \quad (7.8)$$

które jest także równaniem stożka, co oznacza, że cień rzucany przez poruszającą się kulę jest wciąż okrągły. Co prawda wybraliśmy szczególną chwilę obserwacji $t'_o = t_o = 0$, jednak ze względu na dowolność położenia kuli w układzie primowanym, nasz wynik jest zupełnie ogólny: kula poruszająca się z dowolną, stałą prędkością zawsze rzuca okrągły cień. W różnych układach cień będzie padał z różnych kierunków $\mathbf{a}$ i będzie miał różne rozmiary katowe θ , jednak będzie zawsze okrągły.

Pytania

- Czy na podstawie analizy pozornego kształtu ruchomej kuli możemy powiedzieć coś o pozornym kształcie ruchomego okręgu w chwili, gdy okrąg ten mija obserwatora? Uzasadnij odpowiedź analizą równania (7.3).

Zadania

- Względem spoczywającego obserwatora porusza się prostoliniowo i ze stałą prędkością niewielki obiekt. Jego pozorna prędkość wynosi $2c$. Jaka jest rzeczywista prędkość obiektu? Obserwator znajduje się w punkcie przecinającym tor ruchu.
- Czy istnieje maksymalna pozorna prędkość określana na podstawie światła docierającego od poruszającego się obiektu? Jeśli tak – podaj ją.

Rozdział 8

DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA

Dotychczas zajmowaliśmy się niemal wyłącznie relatywistyczną kinematyką i jej konsekwencjami. To zabawne, że materiał ten w nierelatywistycznej mechanice jest niemal trywialny i na większości wykładów poświęca mu się z tego powodu bardzo niewiele czasu. O wiele szerszym działem mechaniki jest nierelatywistyczna dynamika. Ponieważ w naszym wykładzie kładziemy nacisk na nowe pojęcia i zjawiska niewystępujące w wersji nierelatywistycznej, dynamice poświęcimy jedynie jeden rozdział analizując różnice pomiędzy dynamiką relatywistyczną i nierelatywistyczną.

8.1 KONIEC TRZY PO TRZY. CZTEROWEKTORY.

Podobnie jak w trójwymiarowej przestrzeni wygodnym pojęciem jest wektor posiadający trzy niezależne składowe, tak w czterowymiarowej czasoprzestrzeni pomocnym obiektem jest *czterowektor*. Naturalnym kandydatem na czterowektor jest zbiór liczb określających chwilę i położenie jakiegoś zdarzenia (ct, x, y, z) , albo w skrócie $(ct, \mathbf{r})$. Czynniki c został wprowadzony, aby wymiar wszystkich składowych czterowektora był jednakowy. Z poprzednich rozdziałów wiemy już, w jaki sposób transformuje się czterowektor pomiędzy różnymi układami współrzędnych z $(ct, \mathbf{r})$ na $(ct', \mathbf{r}')$. Transformacja Lorentza opisująca owo przejście zachowuje, jak wiemy, wielkość $(ct)^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, którą możemy nazwać kwadratem „długości” czterowektora. Ten prosty przykład podsuwa nam pomysł na następujące uogólnienie pojęcia czterowektora. Czterowektorem będziemy nazywać zestaw czterech wielkości (A^0, A^1, A^2, A^3) albo $(A^0, \mathbf{A})$, które pod wpływem przejścia do układu inercjalnego poruszającego się z prędkością V wzdłuż osi x przechodzą w $(A'^0, \mathbf{A}')$:

$$\begin{aligned}
A'^0 &= \frac{A^0 - A^1 V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
A'^1 &= \frac{A^1 - A^0 V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
A'^2 &= A^2 \\
A'^3 &= A^3
\end{aligned} \tag{8.1}$$

lub ogólniej, w przypadku dowolnego wektora prędkości $\mathbf{V}$ ruchomego układu odniesienia:

$$\begin{aligned}
A'^0 &= \frac{A^0 - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
\mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} + \frac{\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} - A^0 \frac{\mathbf{V}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Nasza definicja mówi po prostu, że czterowektorem jest wszystko, co transformuje się jak *czteropolożenie* $(ct, \mathbf{r})$. Tak zdefiniowaną wielkość będziemy oznaczać greckim indeksem u góry: A^μ .

Z łatwością sprawdzamy, że pod wpływem transformacji (8.1) lub (8.2) wyrażenie $(A^0)^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ nie zmienia swojej wartości, czyli jest równe $(A'^0)^2 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'$. Nie możemy przepuścić tak niepowtarzalnej okazji i nie nazwać powyższego wyrażenia kwadratem *długości* naszego dowolnego czterowektora. Wszakże w fizyce (jak również w matematyce) każdy niezmiennik jest ważny i zostaje obdarowany nazwą (wyznacznik macierzy w algebrze, długość i odstęp czasu w mechanice nierelatywistycznej, ładunek elektryczny w elektrodynamice, kwadrat modułu funkcji falowej w mechanice kwantowej – wszystkie te wielkości są ważne dlatego, że się nie zmieniają pod wpływem pewnych przekształceń). Długość czterowektora A^μ możemy przedstawić wprowadzając elegancką notację korzystającą z greckich indeksów μ i ν przyjmujących wartości od 0 do 3: $\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$, gdzie A^μ jest μ -tą składową czterowektora $\mathbf{A}^\mu$, $\eta_{\mu\nu}$ nazywa się metryką czasoprzestrzeni Minkowskiego (charakteryzującą układy inercjalne) lub w skrócie *metryką Minkowskiego*, która ma postać:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

a ponadto w domyśle stosowana jest *konwencja sumacyjna Einsteina* mówiąca, że w jednomianowych wyrażeniach, w których powtarza się jakiś indeks należy wykonać po nim sumę po całym przebiegu zmienności. W tym wypadku domyślną sumę przebiegającą od 0 do 3 wykonujemy po indeksach μ oraz ν .

Można ponadto sprawdzić, że dla dowolnej pary czterowektorów $\mathbf{A}^\mu$ i $\mathbf{B}^\mu$ transformacja Lorentza nie zmienia wartości wyrażenia $A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$, co w skrócie możemy zapisać jako: $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu$. Transformacja Lorentza jest liniowa, z czego wynika, że czterowektorem jest zatem także dowolna kombinacja liniowa czterowektorów $\alpha \mathbf{A}^\mu + \beta \mathbf{B}^\mu$, czyli przy transformacji Lorentza nie zmienia się wyrażenie: $\eta_{\mu\nu}(\alpha A^\mu + \beta B^\mu)(\alpha A^\nu + \beta B^\nu) = \eta_{\mu\nu}(\alpha A'^\mu + \beta B'^\mu)(\alpha A'^\nu + \beta B'^\nu)$.

8.2 MAGICZNA CZTEROREGUŁA

Powyższe własności czterowektorów są ogólnie znane, jest jednak jeszcze jedna niezwykle własność czterowektorów, która wydaje się być niezauważona w większości opracowań i o której chcielibyśmy teraz opowiedzieć. Rozważmy układ inercjalny K oraz poruszający się względem niego z prędkością $\mathbf{V}$ układ K' . Pokażemy, że dla dowolnego czterowektora $\mathbf{A}^\mu$ zachodzi następująca tożsamość:

$$\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}'}{A^0 + A'^0} = \frac{\mathbf{V}/c}{1 + \sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (8.4)$$

gdzie po lewej stronie występuje w liczniku różnica przestrzennych, a w mianowniku suma czasowych składowych czterowektora wzięte w układach K i K' . Prawa strona natomiast w ogóle nie zależy od $\mathbf{A}^\mu$, co wydaje się zadziwiające. Oznacza to, że dla dwóch, absolutnie dowolnych czterowektorów $\mathbf{A}^\mu$ i $\mathbf{B}^\mu$ musi zachodzić równość:

$$\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}'}{A^0 + A'^0} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}'}{B^0 + B'^0}. \quad (8.5)$$

Aby udowodnić magiczną regułę (8.4) wprowadźmy trzeci układ inercjalny K'' taki, że K porusza się względem K'' z pewną prędkością $-\mathbf{U}$, a K' porusza się względem K'' z prędkością $\mathbf{U}$. Czyli układ K'' jest jak gdyby „pomiędzy” K i K' . Zakładamy przy tym, że osie wszystkich trzech układów są nieobrócone. Dokonajmy teraz transformacji $\mathbf{A}''^\mu$ i $\mathbf{A}^\mu$ występujących w lewej stronie równania (8.4) do układu K'' . Podstawiając wzory transformacyjne (8.2), dla prędkości, odpowiednio $-\mathbf{U}$ i $\mathbf{U}$ dostajemy po skróceniu większości wyrazów, że lewa strona równania (8.4) równa jest po prostu $\frac{\mathbf{U}}{c}$. Ze wzorów transformacyjnych dla prędkości dostajemy związek $\mathbf{V} = \frac{2\mathbf{U}}{1+U^2/c^2}$, który można łatwo odwrócić otrzymując prawą stronę równania (8.4).

8.3 CZTEROPRĘDKOŚĆ I JEJ WSPÓŁZMIENNICZOŚĆ

Na razie zdefiniowaliśmy w abstrakcyjny sposób nowe i ogólne pojęcie czterowektora. Przydałby się teraz jakiś przykład. Przypuśćmy, że w pewnym układzie inercjalnym czterowektor $\mathbf{v}''^\mu$ ma składowe $(c, 0, 0, 0)$. Przechodząc do układu, który porusza się z prędkością $-\mathbf{v}$ nasz czterowektor, na mocy definicji (8.2), transformuje się na:

$$\mathbf{v}^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (8.6)$$

Jeśli w primowanym układzie współrzędnych pewien obiekt znajdował się w spoczynku, to w układzie nieprimowanym porusza się z prędkością $\mathbf{v}$, a wielkością czterowektorową opisującą ten ruch jest właśnie wielkość $\mathbf{v}^\mu$ dana wyrażeniem (8.6) i nazywana *czteroprędkością*. Otrzymane wyrażenie (ponownie jak wszystkie inne czterowektory, w których występuje prędkość) posiada bardzo ważną własność nazywaną *współzmienniczością*. Polega ona na tym, że gdy przechodzimy do nowego układu odniesienia możemy przetransformować nasz czterowektor na dwa sposoby i obie metody dają dokładnie ten sam wynik. Pierwszą metodą, jest po prostu skorzystanie z definicji (8.2) w celu obliczenia poszczególnych składowych czterowektora w nowym układzie. Natomiast alternatywnym sposobem jest wyliczenie prędkości $\mathbf{v}'$ w nowym układzie na podstawie wzorów (2.20) i wstawienie jej bezpośrednio do wyrażenia (8.6):

$$\mathbf{v}''^\mu(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\mu(\mathbf{v}'). \quad (8.7)$$

Własność współziemniczości czteroprędkości $\mathbf{v}^\mu$ sprawdziliśmy już w jednym, szczególnym przypadku rozważając primowany układ odniesienia, w którym prędkość $\mathbf{v}$ znikała. Do tego układu możemy przejść stosunkowo łatwo biorąc we wzorze (2.20) $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ i dostając natychmiast $\mathbf{v}' = 0$. Procedura ta prowadzi z powrotem do czterowektora $(c, 0, 0, 0)$ i jest równoważna zastosowaniu definicji (8.2). Chcielibyśmy jednak wykazać współziemniczość w przypadku ogólnym, gdy przechodzimy z wyrażeniem (8.6) do dowolnego układu odniesienia.

Przekształćmy najpierw czterowektor $\mathbf{v}^\mu$ stosując wzór transformacyjny dla prędkości. W osiągnięciu celu wygodnie nam będzie skorzystać z wyrażenia (3.15), które po drobnych zabiegach przyjmuje postać:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.8)$$

Wynik ten jest identyczny z uzyskanym poprzez bezpośrednie wstawienie $\mathbf{v}^\mu$ do wzoru transformacyjnego (8.2) dla czasowej składowej czterowektora A^0 . W analogiczny sposób otrzymujemy dowód współziemniczości składowej przestrzennej. Stosując wzory (2.20) i (8.8) dostajemy:

$$\frac{\mathbf{v}'/c}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right) - \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right)}{c \sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (8.9)$$

co znów idealnie zgadza się z wynikiem uzyskanym na mocy definicji (8.2). Dowodzi to pełnej współziemniczości $\mathbf{v}^\mu$.

Sprawdźmy jeszcze tożsamość, która powinna być już zupełnie oczywista, mianowicie, że długość czteroprędkości nie zmienia się przy zmianie układu odniesienia:

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 = c^2. \quad (8.10)$$

Zatem długość ta wynosi po prostu c^2 .

Na deser zostawiliśmy pewien smakołyk. Być może pamiętacie ile trzeba się było namęczyć, by rozwiązać problem Pawła, Gawła i Filemona opisany w rozdziale 3? Szczególnie męczące było wyprowadzenie wzoru (3.17). Zwróćcie teraz uwagę, że tożsamość ta jest

niczym innym, jak świeżo poznaną magiczną czteroregułą (8.4) zastosowanej do czterowektora prędkości $\mathbf{v}^\mu$. Ile pracy mogliśmy zaoszczędzić! Powinniście już zacząć lubić nowe, niezwykle pożyteczne pojęcie czterowektora.

8.4 CZTEROPĘD

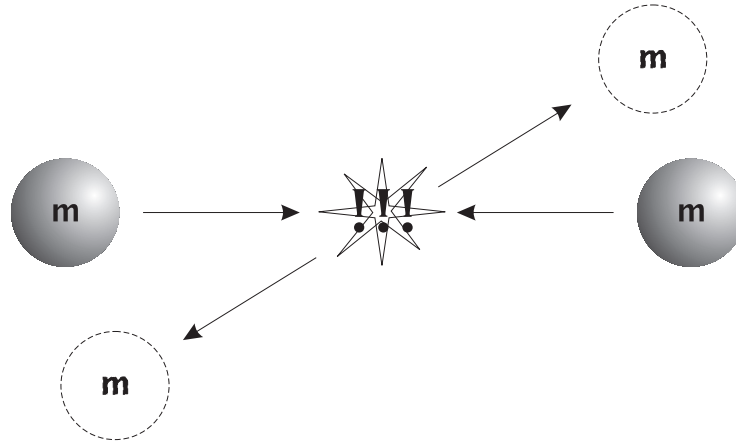
Z czteroprędkości możemy zbudować wiele innych czterowektorów. Na przykład mnożąc wyrażenie (8.6) przez dowolną stałą m otrzymamy nowy czterowektor, którego kwadrat długości wynosi $m^2 c^2$:

$$\mathbf{p}^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (8.11)$$

Czy czterowektor ten odgrywa jakąś szczególną rolę? By się o tym przekonać rozwinimy jego poszczególne składowe w szereg do drugiego rzędu (włącznie) stosując przybliżenie małych prędkości:

$$\begin{aligned} \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &\approx mc + \frac{mv^2}{2c} + \dots \\ \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &\approx m\mathbf{v} + \dots \end{aligned} \quad (8.12)$$

Wzory zaczynają wyglądać znajomo: w rozwinięciu pierwszej składowej rozpoznajemy wyrażenie na energię kinetyczną cząstki o masie m poruszającej się z prędkością $\mathbf{v}$. Znane z przedszkola wyrażenie $\frac{mv^2}{2}$ jest jednak przeskalowane o addytywny czynnik mc^2 i dodatkowo podzielone przez c . Natomiast pierwszy człon rozwinięcia drugiego wyrażenia wygląda jak pęd tej samej cząstki. Czy to rzeczywiście możliwe, że otrzymane wyrażenia określają relatywistyczną energię cząstki swobodnej (podzielną przez c dla ujednolicenia jednostek) i jej relatywistyczny pęd? Możemy to sprawdzić rozważając przypadek zderzenia sprężystego dwóch ciał. Jeżeli okaże się, że we wszystkich możliwych układach odniesienia spełniona jest zasada zachowania naszych kandydatów na energię swobodną i pęd, to oznaczać to będzie, że zaproponowane wyrażenia, nazwijmy je roboczo E i $\mathbf{p}$:



Rysunek 8.1: Dwie jednakowe kule zderzające się sprężysto w układzie środka masy.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8.13)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

rzeczywiście stanowią dobre relatywistyczne uogólnienie pojęcia energii i pędu swobodnej cząstki. Rozpatrzmy najprostszy możliwy przypadek dwóch identycznych kul o masie m zderzających się sprężysto w układzie środka masy – rysunek 8.1. Jak widać, dopuszczamy sytuację ogólną, w której zderzenie nie musi być centralne.

Po zderzeniu prędkości obu kul muszą mieć jednakową wartość i być przeciwnie skierowane. Nie wynika to z zasady zachowania pędu czy energii (których przecież jeszcze nie znamy), ale z *symetrii* zagadnienia. Możemy również wywnioskować stosując argument symetrii, że prędkości kul po zderzeniu mają tę samą wartość co przed zderzeniem. Wynika to z faktu, że zderzenie całkowicie sprężyste powinno być odwracalne w czasie. Gdyby w wyniku zderzenia prędkości zmalały, to myślowo odwracając proces w czasie okazałoby się, że w procesie odwróconym prędkości wzrosły. Oznacza to, że przy pewnych prędkościach zderzenia $\mathbf{v}$ po zderzeniu prędkość musiałaby wzrosnąć, a przy innych z kolei zmaleć. Musiałaby zatem istnieć także pewna szczególna prędkość, której wartość nie zmienia się w trakcie zderzenia. Ponieważ nie istnieje nic, co miałoby tę prędkość wyróżniać, to musimy przyjąć, że w elastycznym zderzeniu jednakowych kul w układzie środka masy mogą zmie-

nić się jedynie kierunki prędkości i to wyłącznie w symetryczny sposób (jak na rysunku 8.1).

Skoro tak, to w naszym zderzeniu zachowana jest zarówno suma wielkości E dla obu kulek, jak i suma wektorowa wielkości $\mathbf{p}$. Sumy te wynoszą odpowiednio $\frac{2mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ oraz 0. Natomiast z naszych poprzednich rozważań dotyczących współzmienniczości oraz z faktu, że suma czterowektorów jest również czterowektorem wynika, że równanie wyrażające obie zasady zachowania są także współzmiennicze. To zaś powoduje, że zarówno energia, jak i pęd będą automatycznie zachowane w każdym innym układzie odniesienia. Zatem od teraz możemy już oficjalnie nazywać wielkości występujące w równaniach (8.13) *energią* i *pędem cząstki swobodnej* o masie m i prędkości $\mathbf{v}$. Co prawda powinniśmy jeszcze wykazać, że energia i pęd swobodnej cząstki jest również zachowana w zderzeniu elastycznym kulek o różnych masach, jednak to zadanie zostawimy zainteresowanemu Czytelnikowi.

W tym momencie powinno być już zupełnie jasne, dlaczego czterowektor (8.11) nazywany jest *czterowektorem energii-pędu* lub w skrócie *czteropędem*. Wypiszemy jeszcze ważny i często stosowany związek pomiędzy energią i pędem cząstki swobodnej. Zastosujemy po prostu wzór na kwadrat długości czterowektora energii-pędu: $(\frac{E}{c})^2 - p^2 = m^2 c^2$ lub równoważnie:

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2 c^2. \quad (8.14)$$

Możemy już teraz odpowiedzieć na bardzo ważne pytanie: co w zasadzie sprawia, że nie da się rozpędzić cząstki do dowolnie dużej prędkości? Dlaczego używając odpowiednio dużej energii do rozpędzenia cząstki nie możemy nadać jej prędkości większej niż c ? Odpowiedź na to pytanie kryje się we wzorze na energię. Wynika z niego, że energia cząstki, której prędkość zbliża się do c gwałtownie wzrasta aż do nieskończoności. Oznacza to, że do rozpędzenia masywnej cząstki do prędkości światła trzeba by użyć nieskończonej energii, a to jest oczywiście niemożliwe.

Analizując wzory (8.13) możemy również stwierdzić, że cząstki, które nie posiadają masy, a przenoszą energię i pęd (na przykład fotony), muszą zawsze poruszać się z prędkością światła.

8.5 $E = mc^2$

Nadszedł właściwy moment, aby zrozumieć sens legendarnej formuły Einsteina $E = mc^2$ parafrazowanej na drzwiach niektórych toalet, jako $E = wc^2$. Pod koniec tego podrozdziału wszystko powinno być już jasne. Na początek powróćmy do rozwinięcia wyrażenia na energię (podzieloną przez c) cząstki swobodnej o masie m (8.12). W pierwszym członie pojawia się znajomy czynnik mc^2 nazywany niekiedy *energią spoczynkową*. Czy ma on jakieś znaczenie? Ktoś mógłby przecież powiedzieć, że energię tak czy inaczej definiujemy z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej (a nawet multiplikatywnej, przeskalowując masę). Moglibyśmy na przykład rozważać wyrażenie na energię kinetyczną postaci $E - mc^2$, tak aby energia cząstki spoczywającej wynosiła zero. Co prawda tego typu energia nie byłaby składową czterowektora, ale czy jest to wystarczający powód, by czynnik ten traktować poważnie? Sama elegancja nie jest dowodem na to, że energia spoczynkowa ma jakiegokolwiek znaczenie fizyczne (dla niektórych elegancja może być jednak ważną sugestią).

Aby przekonać się o znaczeniu czynnika spoczynkowego, przeanalizujmy idealnie nieelastyczne zderzenie dwóch jednakowych kulek o masie m . W układzie środka masy kulki po prostu skleją się ze sobą pozostając po zderzeniu nieruchome. Co stanie się z ich energią? Wiemy to chociażby z mechaniki nierelatywistycznej: część energii kinetycznej zamieni się na ciepło, a część wywoła deformację materiału. Podobnie jak w mechanice nierelatywistycznej oczekujemy, że niezależnie od tego czy energia mechaniczna jest zachowana, czy nie, zachowany będzie pęd. I rzeczywiście, w układzie środka masy pęd jest zachowany. Chcielibyśmy, by podobnie działo się w innych układach inercjalnych. By to sprawdzić przyjmijmy, że przed zderzeniem, w układzie środka masy kulki poruszają się z prędkościami $\pm v$. Łączny pęd $\mathbf{p}'$ obu kulek przed zderzeniem w układzie inercjalnym poruszającym się z prędkością $\mathbf{V}$ względem układu środka masy otrzymujemy korzystając z uzyskanego wcześniej wzoru (8.9):

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= m \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right) - \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
&\quad + m \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(-\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right) - \left(\mathbf{V} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
&= \frac{-2m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Natomiast prędkość zlepionych kulek wynosi po prostu $-\mathbf{V}$, zatem ich pęd...

$$\mathbf{p}' = \frac{-2m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \dots \tag{8.16}$$

...zaraz, zaraz, coś tu się nie zgadza! Wyrażenia na pęd przed zderzeniem (8.15) i po zderzeniu (8.16) są różne! Wygląda to tak, jak gdyby pęd nie był w tym układzie zachowany, albo masa złożonych kulek wynosiła nie $2m$, ale $\frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Przyjmijmy hipotezę, że pęd w tym układzie jest jednak zachowany. Czy to możliwe, by masa kulek uległa zmianie? Przecież są to wciąż te same kulki co przed zderzeniem. Różni je najwyżej temperatura, czyli energia wewnętrzna. Chwileczkę, chwileczkę, wiemy przecież, że energia wewnętrzna, to po prostu ruch cząsteczek, z których zbudowane są nasze kulki. Większa energia wewnętrzna oznacza większą prędkość tych cząsteczek. Czy to jednak możliwe, żeby masa poruszających się cząsteczek realnie wzrastała ze wzrostem ich prędkości? We wzorze na relatywistyczny pęd (8.13) występuje czynnik $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, który wygląda jak *relatywistyczna masa* poruszającej się cząstki (lub kulki). Zauważmy, że jeśli na moment założymy, że czynnik ten wyznacza rzeczywistą masę poruszającego się ciała, która jest zachowana w zderzeniach nieelastycznych, to nasze kłopoty z niezachowaniem pędu znikną! Energia, którą trzeba włożyć, by rozpędzić kulkę do prędkości $\mathbf{v}$, jest równa $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$. Według naszej roboczej hipotezy masa relatywistyczna rozpędzonej kulki to $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, podczas gdy jej *masa spoczynkowa* wynosi po prostu m . Zauważmy, że wielkości te spełniają następujący związek:

$$\Delta E = \Delta mc^2, \tag{8.17}$$

wynikający bezpośrednio z konieczności ratowania zasady zachowania pędu w zderzeniach nieelastycznych.

Mając w pamięci mikroskopowy obraz kulek, potrafimy od początku prześledzić losy zagubionej energii. Początkowo chłodne kulki posiadały pewną energię spoczynkową oraz dodatkową energię kinetyczną. W momencie zderzenia energia kinetyczna została zamieniona na ciepło, czyli energie kinetyczne cząsteczek materiału. Wzrost ich prędkości spowodował wzrost ich mas – czyli w opisie makroskopowym wzrost masy spoczynkowej złączonych kulek, a zatem również ich energii spoczynkowych. Oznacza to, że wzrost masy spoczynkowej zderzonych kulek mogliśmy uważać za efekt kinematyczny pamiętając o ich budowie wewnętrznej. Problem pojawi się, gdy zapytamy o zderzenia nieelastyczne bądź rozpady cząstek *elementarnych*, nie posiadających wewnętrznej struktury. W tym przypadku, nasze relatywistyczne wzory na energię i pęd są nadal poprawne i mamy ten sam problem: musi wzrosnąć masa spoczynkowa, lecz tym razem efekt nie może być już kinematyczny, bo wewnątrz cząstek elementarnych nie ma już niczego, co mogłoby się ruszać! Nie pozostaje nam nic innego jak przyjąć, że związek pomiędzy masą a energią nie jest prawem wyłącznie kinematycznym, ale fundamentalnym prawem przyrody spełnionym nawet, gdy wewnątrz masy nie ma żadnego ruchu. Napiszmy więc raz jeszcze:

$$E = mc^2, \tag{8.18}$$

gdzie E jest energią spoczywającej cząstki. Widzimy, że mc^2 nie jest wcale nieistotną stałą, a masa musi być jedną z dostępnych form energii. Inaczej w zderzeniach nieelastycznych nie byłby zachowany pęd. Nie jest to zresztą wcale czysta teoria. Dzięki poprawności tego wzoru powiodła się przecież budowa bomby atomowej!

Zwróćmy jeszcze uwagę, że w przeciwieństwie do mechaniki nierelatywistycznej, w zderzeniach nieelastycznych w przypadku relatywistycznym zachowana jest energia. Ponieważ zaś jest ona, z dokładnością do stałej c^2 tym samym, co relatywistyczna masa, to i ta ostatnia jest zachowana we wszystkich możliwych zderzeniach.

8.6 RELATYWISTYCZNA SIŁA I II PRAWO NEWTONA

İlekroć rozważamy dowolny, zamknięty układ ciał, spełniona jest zasada zachowania całkowitego pędu (a także energii). Jednakże często rozważa się pęd pojedynczego ciała na

które działają ciała zewnętrzne, nieuwzględnione w układzie. Wówczas pęd rozważanego ciała może się, naturalnie, zmieniać. Mówimy wtedy, że za zmianę pędu odpowiedzialna jest działająca *siła*. W gruncie rzeczy pojęcie siły jest obiektem czysto pomocniczym, ułatwiającym opisywanie oddziaływań pomiędzy ciałami. W mechanice nierelatywistycznej siła pojawia się (i jest niejako definiowana) w równaniu Newtona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ lub równoważnie $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. W jaki sposób uogólnić pojęcie siły na przypadek relatywistyczny? Zwróćmy uwagę, że w teorii względności $m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ to nie to samo, co $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Nie dość, że wektory te przyjmują różne wartości, to mogą mieć nawet różne kierunki. Aby zdefiniować relatywistyczną siłę musimy się zatem zdecydować na jedną z alternatywnych możliwości. Ze względu na to, że pęd relatywistyczny jest wielkością mającą ogromne znaczenie (w końcu w zamkniętych układach jest zachowany), siłę definiuje się poprzez relatywistyczne *II prawo Newtona* zawierające pęd:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (8.19)$$

Oczywiście w każdej chwili możemy rozważany układ *rozszerzyć* na wszystkie oddziałujące ciała i wówczas całkowita zmiana pędu będzie wynosić zero, co oznacza, że będzie musiało być także spełnione *III prawo Newtona* mówiące, że w oddziaływaniu dwóch ciał występują zawsze dwie siły o równych wartościach i przeciwnych kierunkach działające na te ciała (sprawy mogą się jednakowoż nieco skomplikować – do tego tematu powrócimy jeszcze analizując siły elektryczne i magnetyczne).

Ponieważ przyrost czasu dt występujący w powyższym równaniu zależy od układu odniesienia, spodziewamy się, że również siła będzie jakoś zależeć od prędkości $\mathbf{V}$ przyjętego układu współrzędnych. W jaki sposób? Przypomnijmy sobie, że już kiedyś natrafiliśmy na ten problem rozważając w podrozdziale 2.6 zagadnienie związane z przyciąganiem ładunku elektrycznego przez przewód z prądem. Zauważyliśmy wówczas, że wszystkie paradoksy znikają, o ile przyjmimy, że siła $\mathbf{F}'$ działająca w układzie poruszającym się z prędkością $\mathbf{V}$ może być wyrażona poprzez siłę $\mathbf{F}$ działającą w układzie spoczywającym relacją:

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.20)$$

W ten sposób dostajemy ważny wynik mówiący, że jeśli siła transformuje się zgodnie z powyższym prawem, to przyrost pędu pomiędzy określonymi zdarzeniami jest zawsze taki

sam: $d\mathbf{p} = d\mathbf{p}'$. Jest to wynik zgodny z zasadą zachowania całkowitego pędu z czego oczywiście bardzo się cieszymy. Okazuje się, że uzupełniając wektor siły pewną dodatkową zerową składową, można zbudować z nich nowy czterowektor nazywany *czterosiłą*. Naturalnie, wówczas wzór transformacyjny (8.20) trzeba będzie również uzupełnić o dodatkowy element, ażeby czterosiła transformowała się jak przystało na przyzwoity czterowektor. Wychodzi bowiem na to, że wzór (8.20) jest poprawny tylko, gdy siła $\mathbf{F}$ działa na cząstkę spoczywającą bądź poruszającą się (jak w przykładzie z przewodnikiem elektrycznym) prostopadle do kierunku działania tej siły. Szczegóły śledztwa pozostawiamy Czytelnikowi.

8.7 HIPOTEZA PLANCKA

Opisywaliśmy dotąd obiekty materialne, a co ze światłem? Przenosi ono przecież zarówno pęd, jak i energię. Rzut okiem na równanie (8.14) pozwala wywnioskować, że dla światła spełniony powinien być związek $E = pc$. Potwierdza to analiza *równań Maxwella*, a w szczególności wyrażen opisujących gęstość energii pola i *wektor Poyntinga*, o czym przekonaliśmy się w dalszej części wykładu. Rozważmy więc układ odniesienia, w którym porcja światła wyemitowana przez nieruchome źródło i zlokalizowana w pewnym zamkniętym obszarze ma energię E i pęd $p = \frac{E}{c}$ skierowany wzdłuż osi $-x$. Czterowektor energii pędu ma zatem postać $\mathbf{p}^\mu = \frac{E}{c}(1, -1, 0, 0)$. Przetransformujmy go do układu, w którym źródło ma prędkość v , czyli dokonajmy transformacji Lorentza do układu poruszającego się z prędkością $-v$. W wyniku otrzymujemy:

$$\mathbf{p}'^\mu = \frac{E}{c} \left(\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}, -\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}, 0, 0 \right), \quad (8.21)$$

co oznacza, że energia porcji światła zależy od prędkości źródła proporcjonalnie do czynnika $\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$. Przywołując wnioski z rozdziału 6.1 zwróćmy uwagę, że jest to dokładnie taka sama zależność, jak zależność częstości światła od prędkości emitującego go źródła. Obserwacja niby prosta, ale prowadzi do interesującego wniosku. Otóż kiedy Max Planck postulował istnienie kwantów energii światła przyjął, że energia jednego kwantu jest proporcjonalna do częstości związanej z nim fali elektromagnetycznej. Czy możliwe było postulowanie jakiegokolwiek innej zależności energii od częstości? Wniosek, który właśnie wyciągnęliśmy każe nam zaprzeczyć – jakakolwiek inna funkcja częstości niż liniowa transformowałaby się

przy zmianie układu odniesienia inaczej niż energia. Oznacza to, że tylko liniowy związek energii i częstości jest współzmienniczy. Jakakolwiek modyfikacja hipotezy Plancka byłaby niezgodna z teorią względności, której, swoją drogą, w 1900 roku Planck nie mógł jeszcze znać.

8.8 KLASYFIKACJA CZTEROWEKTORÓW

W poprzednim paragrafie wyprowadziliśmy w jednowymiarowym przypadku czteropęd światła (8.21), który okazał się mieć inną postać, niż wyznaczona wcześniej czteropędność (8.6). Pojawia się pytanie, jakie inne czterowektory zależące od prędkości mogą istnieć i wyrażać wielkości fizyczne?

Wyznamy ogólną postać czterowektora $\mathbf{A}^\mu$ zależącego od prędkości $\mathbf{v}$. Jeśli w pewnym wybranym układzie, w którym $\mathbf{v} = 0$ wartość rozważanego czterowektora wynosi $\mathbf{A}'^\mu = (A'^0, \mathbf{A}')$, wówczas po przejściu do układu poruszającego się z prędkością $-\mathbf{v}$, na mocy definicji (8.2), czterowektor ten przejdzie na:

$$\mathbf{A}^\mu = \left(\frac{A'^0 + \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \mathbf{A}' - \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} + \frac{\frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} + A'^0 \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (8.22)$$

Zatem dowolny czterowektor zależący od prędkości musi być kombinacją liniową dwóch czterowektorów:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \text{ i } \left(\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \mathbf{s} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}/v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (8.23)$$

gdzie $\mathbf{s}$ jest dowolnym wersorem lub pseudowersorem, przy czym długość pierwszego czterowektora wynosi 1 i jest on typu *czasowego*, a drugiego -1 i jest to czterowektor *przestrzenny*. Przykładem zastosowania powyższego wyniku jest czterowektor energii-pędu porcji światła – będzie on proporcjonalny do sumy czterowektorów (8.23), bo jest to jedyny możliwy do uzyskania czterowektor *zerowy*. Występują w nim dwa parametry wektorowe $\mathbf{v}$ i $\mathbf{s}$, którym można nadać interpretację, odpowiednio, prędkości źródła, które wyemitowało światło oraz kierunku wektora falowego. Podobnie, czasowy wektor bazy (8.23) to nic innego jak czteropędność. Natomiast przykład czterowektora (8.23) typu przestrzennego zostanie podany w kolejnym rozdziale.

Pytania

- Czy podgrzewając ciało zwiększamy jego masę spoczynkową? A ciężar?
- Czy w zderzeniach nieelastycznych musi być zachowana całkowita energia swobodna układu cząstek, czy jest tak tylko w przypadku zderzeń elastycznych? Jaka byłaby odpowiedź w fizyce nierelatywistycznej i dlaczego?
- Czy iloczyn masy i przyspieszenia cząstki może mieć inną wartość niż pochodna pędu tej cząstki po czasie?
- Czy iloczyn masy i wektora przyspieszenia cząstki może mieć inny kierunek niż pochodna wektora pędu tej cząstki po czasie?
- Czy wektor siły jest równy przestrzennej części pewnego czterowektora?

Zadania

- Wyznacz wzory transformacyjne dla siły przy zmianie układu inercjalnego. Podaj postać czterowektora, którego elementem jest siła. Jaką interpretację można nadać dodatkowej składowej tego czterowektora?
- Wyznacz prędkość precesji orbity Merkurego zakładając, że jego masa grawitacyjna występująca w klasycznym wzorze Newtona na siłę grawitacyjnego oddziaływania dwóch ciał zależy od prędkości jak: $m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Pozostałe efekty grawitacyjne związane z konsekwencjami ogólnej teorii względności pomini.
- Udowodnij, że swobodny elektron nie może pochłoniąć fotonu.
- Udowodnij, że swobodna para elektron-pozyton nie może w wyniku anihilacji zmienić się w pojedynczy foton.
- Udowodnij, że cząstka masywna nie może pochłoniąć innej cząstki masywnej bez zmiany swojej masy spoczynkowej.

Rozdział 9

UKŁADY NIEINERCJALNE

Przez osiem bitych rozdziałów odmienialiśmy przez wszystkie przypadki pojęcie układu inercjalnego. Raz tylko przemknęło nam pojęcie układu, który nie jest inercjalny – gdy natknęliśmy się na paradoks bliźniąt. Przyszła wreszcie pora, by uznać ruchy jednostajne za skonsumowane, przeżute i przetrawione i rozważyć przypadek ruchów przyspieszonych oraz związanych z nimi obserwatorów *nieinercjalnych*. Pojawia się ciekawe konsekwencje, z *horyzontem zdarzeń*, za którym kryją się zegary chodzące wstecz w czasie!

9.1 CZTEROPRZYSPIESZENIE

Wyrażenie (8.6) nazwaliśmy czteroprędkością. Dlaczego? Widzimy, że w granicy $c \rightarrow \infty$ zerowa składowa czterowektora dąży do 1, a pozostałe składowe do $\mathbf{v}$. Jednak nie to jest powodem nadania czterowektorowi (8.6) nazwy czteroprędkości. Przecież wyrażen posiadających podobne przejście graniczne możemy wymyślić o wiele więcej. Jest inny, ważny powód.

Rozważmy cząstkę, której położenie w każdej chwili czasu opisane jest czteropolożeniem $(ct, \mathbf{r})$ i która porusza się z prędkością $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. W jaki sposób z czterowektora $(ct, \mathbf{r})$ otrzymać czteroprędkość? Na pewno nie, jak być może się narzuca, poprzez różniczkowanie po czasie $\frac{d}{dt}$, gdyż dt zależy od układu odniesienia. Zwróćmy jednak uwagę, że czas własny (2.11) cząstki poruszającej się od punktu $\mathbf{r}_1$ do punktu $\mathbf{r}_2$ nie zależy od układu odniesienia. Jeśli na przykład w wagonie restauracyjnym pociągu PKP zaczęto gotować jajko w chwili, gdy pociąg mijał stację A znajdującą się w $\mathbf{r}_A$, a jajko ugotowało się dokładnie gdy pociąg mijał inną stację B w $\mathbf{r}_B$, to czas własny τ gotowania jajka w wagonie nie zależy oczy-

wiecie od tego kto, i z jakiego układu odniesienia dokonuje obserwacji lub obliczeń. Tak podpowiada zdrowy rozsądek, a co mówią fakty? Otóż, jeżeli dwa bardzo bliskie zdarzenia oddziela interwał czasoprzestrzenny ds , który, jak wiemy, nie zależy od układu odniesienia, to:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = c d\tau. \quad (9.1)$$

Czyli czas własny $d\tau$ proporcjonalny do interwału jest także niezależny od obserwatora, co oznacza, że przewidywaliśmy trafnie. Wróćmy zatem do rozważań na temat czteroprędkości: skoro czteropolożenie $\mathbf{r}^\mu$ jest czterowektorem, to jest nim także różniczka $d\mathbf{r}^\mu$, bo różnica lub dowolna kombinacja liniowa czterowektorów jest nadal czterowektorem. Mnożenie bądź dzielenie czterowektora przez stałą nie zmienia jego czterowektorowości, zatem nie zmienia jej także mnożenie lub dzielenie przez niezmiennik transformacji Lorentza. Oznacza to, że czterowektorem jest również:

$$\frac{d\mathbf{r}^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dct}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{v}^\mu. \quad (9.2)$$

To powinno nieco wyklarować sytuację. Czteroprędkość można otrzymać różniczkując czteropolożenie po czasie własnym. Widzimy ponadto, że tak otrzymany czterowektor możemy po raz kolejny różniczkować po czasie własnym $d\tau$ otrzymując *czteroprzyspieszenie* i tak dalej. Ponieważ, w przeciwieństwie do czteroprzyspieszenia, owo „i tak dalej” nie jest prawie nigdy potrzebne, skupimy się znalezieniu jedynie drugiej pochodnej czteropolożenia. Różniczkując ponownie (9.2) otrzymujemy:

$$\mathbf{a}^\mu = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/c}{(1 - v^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}(1 - v^2/c^2) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/c^2}{(1 - v^2/c^2)^2} \right), \quad (9.3)$$

gdzie $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Powyższe, dość pokraczne wyrażenie okaże się nieocenione, gdy zajmiemy się analizą relatywistycznego ruchu jednostajnie przyspieszonego, czyli kolejnym zagadnieniem, które zbadamy. Czteroprzyspieszenie jest typu przestrzennego i wedle podanej w poprzednim rozdziale klasyfikacji czterowektorów jest proporcjonalne do drugiego czterowektora (8.23). Nie jest to widoczne gołym okiem, gdyż $\mathbf{a}$ jest pewną funkcją $\mathbf{v}$ i $\mathbf{s}$,

którym można tym razem nadać interpretację, odpowiednio, prędkości cząstki oraz kierunku jej przyspieszenia w układzie inercjalnym chwilowo współporuszającym się. Dopiero po jawnym wyznaczeniu i wstawieniu tej zależności wszystko się klaruje.

9.2 POSTULAT ZEGARA POD LUPĄ

Zauważyliśmy słusznie, że czas własny ciała poruszającego się po ustalonym torze łączącym dwa określone zdarzenia powinien być relatywistycznym niezmiennikiem transformacji Lorentza. Takim niezmiennikiem jest oczywiście wyrażenie (2.11) będące konsekwencją postulatu zegara, gdyż jest to całka z interwału czasoprzestrzennego. Przypuśćmy, że chcielibyśmy postulat zegara zmodyfikować dopuszczając zależność czasu własnego od przyspieszenia. Jakie mamy możliwości? Zaczniemy od tego, że z powodów omówionych w rozdziale 9.1, zmodyfikowany czas własny musi nadal być niezmiennikiem transformacji Lorentza. Spróbujmy zatem poszukać niezmienników związanych z przyspieszeniem. Rozważmy różniczkę czteroprędkości (9.2), która także jest czterowektorem:

$$d\mathbf{v}^\mu = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/c}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \frac{d\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right). \quad (9.4)$$

Związany z nią niezmiennik, to, rzecz jasna, relatywistyczny kwadrat jej długości. W przypadku, gdy wektor prędkości $\mathbf{v}$ i jego różniczka $d\mathbf{v}$ są równoległe, wynosi on:

$$\eta_{\mu\nu} dv^\mu dv^\nu = -\frac{dv^2}{(1 - v^2/c^2)^2}. \quad (9.5)$$

Dowolna funkcja niezmiennika nadal jest niezmiennikiem. Dlatego wygodnie nam będzie rozważyć niezmiennicze wyrażenie postaci $\sqrt{-\eta_{\mu\nu} dv^\mu dv^\nu}/c$. Całka z niego wzdłuż dowolnej krzywej, podobnie jak całka (2.11), nie zależy od układu odniesienia:

$$\int \frac{a(t)/c}{1 - v(t)^2/c^2} dt = \text{const}, \quad (9.6)$$

gdzie $a(t) = \frac{dv}{dt}$. Co więcej, niezmiennik ten jest jedyny w swoim rodzaju, bo jest bezwymiarowy! Możemy sobie zatem wyobrazić możliwe modyfikacje wyrażenia określającego czas własny (2.11) w oparciu o znaleziony niezmiennik, a także wiele innych, zależnych

od wyższych pochodnych prędkości. O ile nam jednak wiadomo, z tajemniczych powodów Przyroda realizuje najprostszy możliwy scenariusz i zgodnie ze wszystkimi wykonanymi dotąd eksperymentami badającymi to zagadnienie, postulat zegara jest spełniony. Niemniej, tak długo, jak nie są nam znane powody, warto badać także inne warianty.

9.3 RUCH JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY

No właśnie, jak w ogóle zdefiniować ruch jednostajnie przyspieszony? Klasyczna definicja, mówiąca że ciało nabiera prędkości w jednolitym tempie byłaby w przypadku relatywistycznym marną protezą myślową. Wiemy doskonale, że ciało nie może rozpędzać się bez ograniczeń. Z drugiej strony pojęcie ruchu jednostajnie przyspieszonego jest dobrze określone, gdy ruch odbywa się z prędkością zaniedbywalnie małą w porównaniu z prędkością światła. Aby jakoś wybrnąć, potrzeba nam raz jeszcze użyć organu, który trzymamy 10cm z tyłu nosa. Spróbujmy zdefiniować ruch jednostajnie przyspieszony, jako taki, w którym rozważane ciało w każdej chwili porusza się ze stałym przyspieszeniem z punktu widzenia inercyjnego układu chwilowo współporuszającego się z owym ciałem. Czyli z punktu widzenia takiego układu, w którym ciało w danej chwili spoczywa. Konstrukcja pozornie karkołomna: w każdej chwili musimy znaleźć układ, w którym ciało spoczywa, ale „porusza się” z określonym przyspieszeniem – jeśli za każdym razem przyspieszenie jest takie samo, to mówimy o relatywistycznym ruchu jednostajnie przyspieszonym (swoją drogą ciekawy jest język polski, w którym można z przyspieszeniem poruszać się spoczywając, opodal znaczy to samo, co nieopodal, a precedensowy to samo co bezprecedensowy, natomiast rzyna się lub zżyna w zależności od tego, czym się rzeczoną czynność wykonuje – relatywizm językowy czystej próby). Pytanie, jak wygląda ruch jednostajnie przyspieszony z punktu widzenia jednego, ustalonego obserwatora inercyjnego, który przez cały czas spoczywa? Sprawdźmy to rozważając jednowymiarowy przypadek ruchu wzdłuż osi x . Przy okazji przećwiczymy użycie nowo poznanego formalizmu czterowektorów.

Wiemy, że w danej chwili w układzie współporuszającym się prędkość ciała wynosi zero, zaś przyspieszenie a jest skierowane wzdłuż osi x . Zatem czteroprzyspieszenie (9.3) w tym układzie upraszcza się do:

$$\mathbf{a}'^\mu = (0, a, 0, 0). \quad (9.7)$$

Natomiast w układzie, który cały czas spoczywa, chwilowa prędkość ciała skierowana wzdłuż osi x wynosi v , chwilowe przyspieszenie ciała wynosi po prostu $\frac{dv}{dt}$, zatem czteroprzyspieszenie w tym układzie jest postaci:

$$\mathbf{a}^\mu = \left(\frac{v/c}{(1-v^2/c^2)^2} \frac{dv}{dt}, \frac{1}{(1-v^2/c^2)^2} \frac{dv}{dt}, 0, 0 \right). \quad (9.8)$$

Wiemy jednak, że długość czterowektora nie zależy od układu odniesienia. Oznacza to następującą równość:

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \eta_{\mu\nu} a'^\mu a'^\nu. \quad (9.9)$$

Otrzymujemy stąd następujące równanie:

$$a = \frac{dv/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9.10)$$

Zwróćmy uwagę, że jest to równanie postaci (8.19), czyli równanie opisujące efekt działania stałej w czasie siły $F = ma$. Jego rozwiązaniem z warunkiem początkowym $v(0) = 0$ jest:

$$at = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (9.11)$$

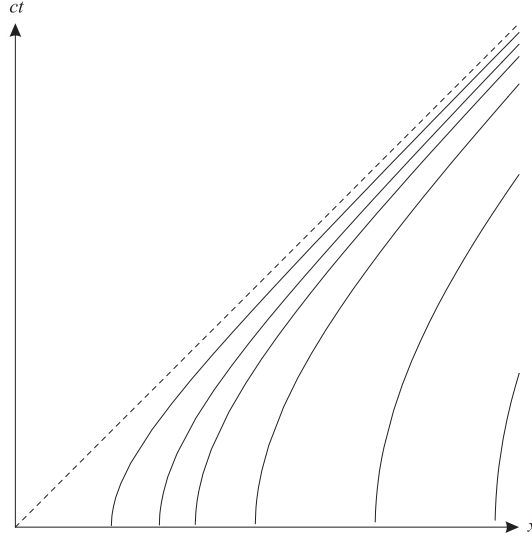
a po odwróceniu zależności:

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}}. \quad (9.12)$$

Z głęboką ulgą stwierdzamy, że gdy czas dąży do nieskończoności, prędkość dąży do c , co utwierdza nas w przekonaniu, że prędkości światła przekroczyć się nijak nie da, nawet poruszając się nieskończenie długo ze stałym przyspieszeniem.

Możemy jeszcze na dokładkę znaleźć tor ruchu ciała poruszającego się ze stałym przyspieszeniem. Szczęśliwie się składa, że zadanie to jest w zasadzie trywialne, bo powyższe wyrażenie na prędkość jest pochodną po czasie funkcji $\frac{c^2}{a} \sqrt{1+a^2t^2/c^2}$, zatem:

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}, \quad (9.13)$$



Rysunek 9.1: Tory punktów poruszających się relatywistycznym ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniami, od lewej do prawej: 1.5, 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.3 mierzonymi w jednostkach bezwymiarowych.

przy czym w chwili początkowej ciało znajdowało się w położeniu $x = \frac{c^2}{a}$.

Otrzymany wynik ma pewną ciekawą własność. Otóż równanie toru (9.13) opisane przez obserwatora poruszającego się z dowolną prędkością V mającego współrzędne bisowane jest identycznej postaci:

$$x''(t'') = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 t''^2}{c^2}}. \quad (9.14)$$

Ażeby to udowodnić, wystarczy podnieść obustronnie do kwadratu równanie (9.13). Po prostych przekształceniach dostajemy:

$$c^2 t^2 - x(t)^2 = -\frac{c^4}{a^2}. \quad (9.15)$$

Zwróćmy jednak uwagę, że lewa strona równania jest relatywistycznym niezmiennikiem, zatem równanie będzie identyczne w każdym innym inercjalnym układzie odniesienia. W zasadzie nie powinno nas zresztą dziwić, że ciało poruszające się relatywistycznie z przyspieszeniem a w jednym układzie, porusza się z tym samym przyspieszeniem a w każdym innym układzie inercjalnym.

Nasz wynik ma w sobie jednak inną, głęboko zaskakującą własność. Tor obserwatora poruszającego się ruchem przyspieszonym dąży asymptotycznie do toru światła opuszcza-

jącego punkt $x = 0$ w chwili $t = 0$. Oznacza to, że światło wysłane z punktu $x = 0$ w chwili $t = 0$ lub później, nigdy nie dotrze do przyspieszanego obserwatora. Co więcej, obserwator ten nie może mieć żadnej wiedzy na temat zdarzeń zachodzących w obszarze czasoprzestrzeni powyżej asymptoty $ct = x$. Prosta ta wyznacza zatem *horyzont zdarzeń* obserwatora przyspieszonego i żadna informacja z niedozwolonego obszaru nigdy już do niego nie dotrze. W chwili początkowej horyzont ten znajduje się w odległości $\frac{c^2}{a}$ od obserwatora. Jak sytuacja wygląda z punktu widzenia rozważanego nieinercyjnego układu odniesienia także w chwilach późniejszych – zbadamy wkrótce.

9.4 PARADOKS BELLA

John Bell, autor pracy o słynnych nierównościach, które poznaliśmy w rozdziale 5.3 chodził kiedyś po laboratorium CERN i zadawał wszystkim napotkanym fizykom teoretykom prostą zagadkę. Podobno wszyscy udzielali błędnej odpowiedzi. Oto ta zagadka.

Dwie rakiety, początkowo spoczywające na stacji kosmicznej w odległości L od siebie połączono sznurkiem o długości L . W pewnej chwili obie rakiety zaczęły poruszać się jedna za drugą ruchem jednostajnie przyspieszonym z jednakowym przyspieszeniem i wzdłuż kierunku łączącego je sznurka. Rakiety poruszały się w taki sposób, że odległość pomiędzy nimi w układzie stacji kosmicznej była stała. Czy w którymś momencie sznurek pękł?

Rozwiązanie jest następujące. Sznurek porusza się z coraz większą prędkością, zatem gdyby nie więzy doszłoby do skrócenia Lorentza. Skrócenie to nie wiązałoby się z istnieniem napięć materiałowych – efekt jest bowiem czysto geometryczny. Jednakże istnienie więzów nakładanych przez położenie rakiet powoduje, że sznurek jest *de facto* rozciągany przez rakiety do swojej długości spoczynkowej. Skoro ruchomy sznurek ma cały czas długość L , to w układzie współporuszającym się chwilowo z jednym z końców sznurka, jego długość stopniowo wzrasta. W związku z tym powinno być oczywiste, że wydłużenie to doprowadzi do powstania napięć w materiale i w którymś momencie sznurek pęknie.

9.5 UKŁAD ODNIESIENIA JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY

Zastanówmy się jak zagadnienie sznurka prezentuje się z punktu widzenia jednej z rakiet, na przykład tej, która leci z tyłu. By nadmiernie nie rozwlekać konstrukcji zdaniowych ustalmy, że rakieta na przedzie sunie Paweł, podczas gdy rakieta na tyłach mknie Gawęł.

Układ Gawła nie jest co prawda inercjalny (co również dotyczy układu Pawła), jednakże możemy rozważyć rodzinę obserwatorów inercjalnych chwilowo współporuszających się z jego rakieta w kolejnych punktach toru. Na mocy postulatu zegara, rodzina ta określa rzeczywistość obserwatora nieinercjalnego.

Pierwszy wniosek, dość oczywisty, jest następujący. W chwili początkowej, gdy rakiety spoczywają, długość łączącego je sznurka w układzie Gawła równa jest L i w miarę wzrastania prędkości rakiet wydłuża się. Oznacza to, że Paweł i Gaweł nie są wcale we wzajemnym spoczynku. Odległość między nimi nie zmienia się jedynie w układzie stacji kosmicznej, co, jak widać, nie może przenosić się na żaden z nieinercjalnych układów związanych z bliźniakami, bo inaczej długość sznurka w układzie (na przykład) Gawła byłaby stale równa L . Zatem według Gawła Paweł stopniowo się od niego oddala.

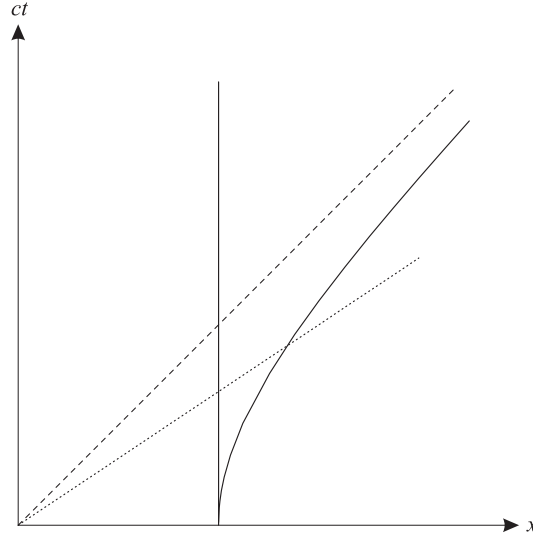
Wyznamy równania osi primowanego układu inercjalnego chwilowo współporuszającego się z Gawłem w pewnej chwili t_0 . W nieprimowanym układzie stacji kosmicznej Gaweł porusza się z prędkością $v(t)$ daną równaniem (9.12) wzdłuż toru $x(t)$ opisanego krzywą (9.13). Oś czasu ct' musi być styczna do toru rakiety w rozważanej chwili t_0 . Zaś oś przestrzenna x' definiująca powierzchnię równoczesności Gawła w chwili t_0 dana jest równaniem $dt' = 0$, co prowadzi do równania

$$dt - \frac{v(t_0)}{c^2} dx = 0, \quad (9.16)$$

wyznaczającego prostą $ct = \frac{v(t_0)}{c}x + b$. Jeśli prosta ta ma przecinać tor Gawła w chwili t_0 , to wyraz wolny b musi zniknąć, gdyż równania określające ruch Gawła (9.12) i (9.13) łączy niemal identyczna relacja

$$ct = \frac{v(t)}{c}x(t). \quad (9.17)$$

Zatem prosta określająca oś x' przecinająca tor Gawła w rozważanej chwili t_0 przecina także początek nieprimowanego układu współrzędnych stacji kosmicznej. Oznacza to, że płaszczyzna równoczesności Gawła w chwili t_0 jest wyznaczona przez promień wodzący określający położenie Gawła w tej samej chwili t_0 – rysunek 9.2. Fakt ten zachodzi wyłącznie dla nieprimowanego układu współrzędnych, którego początek dobrano w taki sposób, żeby spełnione było równanie (9.13).



Rysunek 9.2: Linie świata rakiety i słoika z bigosem zaznaczono liniami ciągłymi. Horyzont zdarzeń zaznaczono linią przerywaną, a przykładowy promień wodzący określający płaszczyznę równoczesności Gawła zaznaczono linią kropkowaną.

Poczynione spostrzeżenie przyda się do udzielenia odpowiedzi następujące pytanie. Przyjmijmy, że rakieta Gawła porusza się po torze wyznaczonym równaniem (9.13) z przyspieszeniem $a = g \approx 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$. Ile czasu minie w niej od chwili startu do momentu, gdy pozostawiony na stacji kosmicznej słoik z bigosem się przeterminuje w układzie Gawła? W chwili startu data ważności na etykiecie wskazywała jeszcze rok.

Graficzna ilustracja tego problemu przedstawiona została na rysunku 9.2, na którym znajdują się tory ruchu Gawła i bigosu. Zwróćmy uwagę, że w układzie bigosu po upływie czasu $\frac{c}{g}$ przekroczy on horyzont zdarzeń Gawła i od tej pory tor słoika nie przetnie już żadnego promienia wodzącego określającego położenie Gawła. Z tego zaś wnioskujemy, że żadne ze zdarzeń za horyzontem nie będzie równoczesne z żadnym punktem toru Gawła. Innymi słowy, według Gawła słoik bigosu nigdy nie przetnie horyzontu zdarzeń. Jak to możliwe? Otóż według Gawła tempo starzenia się zawartości słoika będzie spowalniać i spowalniać i w okolicy horyzontu upływ czasu bigosu niemal się zatrzyma. Graniczny czas, o jaki zestarzeje się według Gawła bigos wynosi:

$$\frac{c}{g} \approx 3 \cdot 10^7 [\text{s}] < \pi \cdot 10^7 [\text{s}] \approx 1 \text{ rok}. \quad (9.18)$$

Czyli według Gawła rozpędzającego się z przyspieszeniem ziemskim g jego przysmak już

nigdy się nie przeterminuje. Odkryliśmy właśnie ogólną własność dotyczącą przekraczania przez jakikolwiek obiekt horyzontu zdarzeń charakteryzującego obserwatora jednostajnie przyspieszonego. Ciało zaczynające swój ruch przed horyzontem zdarzeń, czyli w obszarze dostępnym dla obserwatora przyspieszonego, nigdy, według niego, horyzontu nie przekroczy z powodu coraz bardziej spowolnionego upływu czasu, dążącego w granicy do zera. Dzieje się tak mimo, że z punktu widzenia ciała w chwili mijania horyzontu nic szczególnego się przecież nie dzieje i czas nadal upływa zupełnie normalnie.

Ma miejsce jeszcze inna ciekawa rzecz. Mimo, że Gawł nigdy już nie otrzyma żadnej informacji od bigosu, który przekroczył horyzont, to nic nie stoi na przeszkodzie, żeby sam do niego skutecznie wysyłał wiadomości. Mogą to być na przykład kartki pocztowe wyrażające tęsknotę lub po prostu notatki z podróży. Co prawda według Gawła wysyłane pocztówki również utkną przed horyzontem, jednakże bigos w słoiku bez mniejszych trudności będzie je otrzymywał. Jest to przykład idealnego lustra weneckiego dopuszczającego jedynie komunikację jednostronną.

Horyzont, o którym właśnie napisaliśmy wyznaczony jest w układzie stacji kosmicznej równaniem $x = ct$. Istnieje jednak pewien siostrzany horyzont dany równaniem $x = -ct$, przez który komunikacja możliwa jest również tylko jednostronnie. W tym wypadku dozwolony kierunek komunikacji jest jednak przeciwny niż poprzednio. Widzimy bowiem, że dowolne ciało znajdujące się za siostrzanym horyzontem może bez problemu wysłać sygnał do Gawła, natomiast ten nie jest się w stanie nijak zrewanżować odpowiedzią. Siostrzany horyzont jest zatem analogiczny do powierzchni stożka czasoprzestrzennego, wychodzącego w przyszłość z jakiegoś zdarzenia w układzie inercyjnym. Obserwator poruszający się wzdłuż toru znajdującego się wewnątrz stożka nie może wysłać żadnego podświetlnego sygnału na zewnątrz, ale komunikacja w przeciwnym kierunku jest możliwa.

We wcześniejszej dyskusji zauważyliśmy, że rakietę Pawła oddala się od rakiety Gawła (w układzie tego drugiego) ze wzrastającą prędkością. Zadaćmy więc następujące pytanie: po jakim torze, z punktu widzenia nieprimowanego układu inercyjnego stacji kosmicznej, porusza się kielbasa, która w rakiecie Gawła wisi na stałej wysokości* $\Delta\tilde{x} = h$? Domyślamy się, że według słoika z bigosem czekającego na stacji kielbasa będzie się do Gawła zbliżała.

W chwili początkowej Gawł znajduje się w położeniu $\frac{c^2}{g}$, a kielbasa w $\frac{c^2}{g} + h$. Żądamy, by w dowolnej późniejszej chwili, gdy przejdziemy do układu chwilowo współporuszającego

*Korzystając z okazji przyjmijmy odtąd zasadę, że wielkości wyznaczone w nieinercyjnym układzie odniesienia będziemy ozdabiać tyldą.

się, którego początek pokrywa się z początkiem układu nieprimowanego, Gaweł w tym nowym układzie również znajdował się w $\frac{c^2}{g}$, a kiełbasa nadal w $\frac{c^2}{g} + h$. Jednak tylko jeden tor ma tę własność, że po zmianie układu inercjalnego na chwilowo współporuszający się położenie w chwili początkowej jest takie samo jak w położenie w chwili początkowej w układzie spoczywającym. Jak pokazaliśmy wcześniej, jest to tor relatywistycznego ruchu jednostajnie przyspieszonego. Oznacza to, że w spoczywającym układzie stacji kosmicznej kiełbasa również porusza się po torze zadanym równaniem (9.13), z pewnym przyspieszeniem a_h . Badając położenie kiełbasy w chwili początkowej dostajemy równanie $\frac{c^2}{g} + h = \frac{c^2}{a_h}$, co po przekształceniu daje:

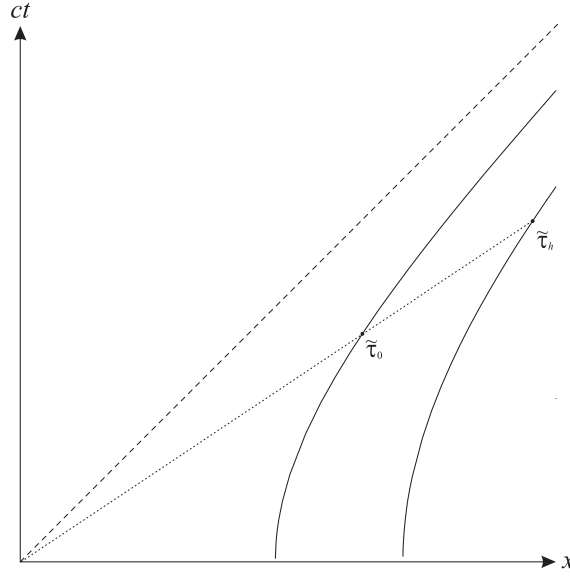
$$a_h = \frac{g}{1 + \frac{gh}{c^2}}. \quad (9.19)$$

Zatem rodzina krzywych przedstawiona na rysunku 9.1 opisuje ruchy poszczególnych punktów rakiety będącej w ruchu przyspieszonym. Również przeciążenie, którego doznaje się na różnych wysokościach h wewnątrz rakiety zmienia się zgodnie z równaniem (9.19). Ten ciekawy wynik pokazuje, że w teorii względności nie jest możliwy ruch jednostajnie przyspieszony ciała o skończonych rozmiarach w taki sposób, żeby przeciążenie każdego fragmentu było identyczne. Przyspieszenie, jakiemu poddane są poszczególne fragmenty rakiety musi zmieniać się z wysokością zgodnie ze wzorem (9.19), co okaże się mieć niezwykle doniosłe konsekwencje w relatywistycznej teorii grawitacji.

Zbadajmy teraz, w jaki sposób upływa czas na identycznych i początkowo zsynchronizowanych zegarach umieszczonych na różnych wysokościach rakiety. Czas własny w ruchu jednostajnie przyspieszonym dany jest całką (2.11), zatem dla zegara umieszczonego na wysokości h mamy:

$$\tilde{\tau}_h = \int_0^T \sqrt{1 - v_h^2(t)/c^2} dt = \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a_h^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c}{a_h} \operatorname{asinh} \left(\frac{a_h T}{c} \right), \quad (9.20)$$

gdzie T wyraża upływ czasu w układzie stacji kosmicznej. Zdarzenia określające granice całkowania powinny należeć do dwóch ustalonych płaszczyzn równoczesności związanych z rakieta. Jak wiemy z poprzedniej dyskusji, równanie płaszczyzny równoczesności jest postaci $ct = Ax$, przy czym $0 \leq A < 1$. Rozpatrując trajektorię odpowiadającą ustalonej wysokości h wyznaczamy odpowiadający jej czas T poprzez wstawienie do równania płaszczyzny $t = T$ i $x = x_h(T)$ – rysunek 9.3. Po prostych przekształceniach otrzymujemy:



Rysunek 9.3: Różny upływ czasu własnego pomiędzy płaszczyznami równoczesności $ct = 0$ i $ct = Ax$ (kropkowana linia) na dwóch zegarach poruszających się z przyspieszeniami a_0 i a_h , odpowiednio $\tilde{\tau}_0$ i $\tilde{\tau}_h$.

$$T = \frac{c}{a_h} \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}, \quad (9.21)$$

co po wstawieniu do wyrażenia (9.20) pozwala wyeliminować zależność od przyspieszenia a_h spod funkcji $\text{asinh}(x)$. Dzięki temu łatwo jest wyrazić stosunek czasów własnych dla dwóch trajektorii ruchu przyspieszonego pomiędzy płaszczyznami równoczesności $ct = 0$ i $ct = Ax$:

$$\tilde{\tau}_h = \tilde{\tau}_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right). \quad (9.22)$$

Zatem im wyżej wisi zegar, tym szybciej upływa na nim czas. Wynik ten oznacza, że również kielbasa wisząca w rakiecie zepsuje się tym szybciej im wyżej została powieszona. Czyli spizarnie z zapasem bigosu i kielbasy należy bezwzględnie umieścić w dole rakiety.

9.6 ZEGARY CHODZĄCE WSTECZ

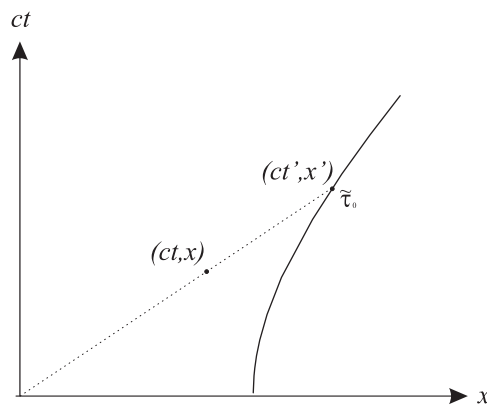
Wzór (9.22) niesie dość frapujące konsekwencje. Jaki na przykład jest upływ czasu zegara wiszącego na wysokości $h = -\frac{c^2}{g}$. Czyżby zegar ten w ogóle się nie starzał? W rzeczy samej,

zegar ten znajduje się przecież dokładnie na horyzoncie zdarzeń, w punkcie $x = 0$, czyli w punkcie, przez który przechodzą wszystkie płaszczyzny równoczesności dla poszczególnych punktów ruchu przyspieszonego. Oznacza to, że zdarzenie $(0, 0)$ jest równoczesne z każdym zdarzeniem na linii świata rakiety, więc zegar umieszczony w $x = 0$ stoi w miejscu.

Co więcej, w obszarze $h < -\frac{c^2}{g}$ czas płynie wstecz. I choć głos rozsądku przechodzi w tym momencie mutację, to z geometrycznego punktu widzenia fakt ten jest dość oczywisty, wystarczy tylko zerknąć na zachowanie przeciwnego końca promienia wodzącego po przedłużeniu go na ujemne wartości x . Ktoś mógłby powiedzieć: co z tego, przecież nic, co znajduje się w rozważanym obszarze nie może się w żadną stronę skomunikować z rakieta, znajduje się bowiem pod obydwoma horyzontami zdarzeń. I słusznie – otrzymany wynik oznacza praktycznie tylko jedną rzecz. Jeśli czoło rakiety porusza się z przyspieszeniem a , to rakietą nie może być dłuższa niż $\frac{c^2}{a}$, co dla $a = g$ wynosi ponad 6100 jednostek astronomicznych. Dość sporo.

9.7 TRANSFORMACJA RINDLERA

Cały niniejszy wykład rozpoczęliśmy od wyprowadzenia pojęcia absolutnie kluczowego dla teorii względności – transformacji Lorentza współrzędnych czasoprzestrzennych pomiędzy dowolnymi układami inercjalnymi. Teraz, gdy rozszerzamy klasę dopuszczalnych układów odniesienia wprowadzając pojęcie obserwatora przyspieszonego, warto zastanowić się, jak wygląda transformacja do jego nieinercjalnego układu.



Rysunek 9.4: Zdarzenie o współrzędnych (ct, x) na płaszczyźnie równoczesności Gawła odpowiadającej czasowi $\tilde{\tau}_0$.

Rozpocznijmy od zdefiniowania współrzędnych obserwatora charakteryzowanego przyspieszeniem a_0 . Przede wszystkim upływ czasu w układzie tego obserwatora określony będzie wskazaniem zegara, który porusza się wraz z nim wzdłuż toru (9.13). Dowolnemu zdarzeniu w tym układzie przypiszemy chwilę $\tilde{\tau}_0$, jeśli będzie się ono znajdować na płaszczyźnie równoczesności zegara wskazującego również $\tilde{\tau}_0$. Płaszczyzną tą jest, jak wiemy, promień wodzący za położeniem zegara. Problem został przedstawiony na rysunku 9.4, z którego można odczytać proporcję, według której dla dowolnego zdarzenia o współrzędnych (ct, x) mamy:

$$\frac{ct}{x} = \frac{ct'}{x'} = \frac{a_0 t' / c}{\sqrt{1 + a_0^2 t'^2 / c^2}} = \operatorname{tgh} \left(\frac{a_0 \tilde{\tau}_0}{c} \right), \quad (9.23)$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z (9.20) przekształconej do postaci (z użyciem innych oznaczeń) $\frac{a_0 t'}{c} = \sinh \frac{a_0 \tilde{\tau}_0}{c}$.

Współrzędna przestrzenna $\tilde{x}$ zdarzenia w układzie przyspieszonym utożsamiana będzie z odległością tego zdarzenia od horyzontu zdarzeń:

$$\tilde{x} = \frac{c^2}{a}, \quad (9.24)$$

gdzie a jest przyspieszeniem charakteryzującym tor ruchu jednostajnie przyspieszonego przecinany przez zdarzenie (ct, x) . Przekształcając związek (9.23) oraz wstawiając do (9.24) wyrażenie (9.15) dostajemy transformację pomiędzy współrzędnymi układu spoczywającego (ct, x) , a współrzędnymi układu przyspieszonego $(c\tilde{\tau}_0, \tilde{x})$ zwaną *transformacją Rindlera*:

$$\begin{aligned} c\tilde{\tau}_0 &= \frac{c^2}{a_0} \operatorname{atgh} \left(\frac{ct}{x} \right) \\ \tilde{x} &= \sqrt{x^2 - c^2 t^2}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Występujący w niej czas $\tilde{\tau}_0$ nazywać będziemy *czasem współrzędnościowym* charakteryzującym wybrany zegar i odpowiadającą mu rodzinę płaszczyzn równoczesności. Podobnie jak w dla transformacji Lorentza, przekształcenie poprzecznych składowych przestrzennych jest trywialne: $\tilde{y} = y$ oraz $\tilde{z} = z$. Dokonując elementarnych przekształceń wzorów transformacyjnych (9.25) możemy wyznaczyć odwrotną transformację Rindlera:

$$\begin{aligned}
ct &= \tilde{x} \sinh\left(\frac{a_0 \tilde{\tau}_0}{c}\right) \\
x &= \tilde{x} \cosh\left(\frac{a_0 \tilde{\tau}_0}{c}\right).
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Zwróćmy uwagę, że otrzymane prawa transformacyjne stosują się wyłącznie do obszaru czasoprzestrzeni, w którym $x^2 \geq c^2 t^2$, czyli obszaru, do którego przyspieszony obserwator ma swobodny dostęp. Otrzymane równania łączące współrzędne układu inercyjnego ze współrzędnymi układu jednostajnie przyspieszanego są dla tych dwóch układów tym, czym dla dwóch układów inercjalnych jest transformacja Lorentza. Równania są zatem bardzo ważne i okażą się bardzo przydatne jeszcze wielokrotnie, gdy przyjdzie nam badać właściwości obserwatorów nieinercjalnych.

Sprawdźmy, w jaki sposób transformacja Rindlera przekształca interwał czasoprzestrzenny (1.17). Ze wzorów (9.26) mamy:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \frac{a_0^2 \tilde{x}^2}{c^4} c^2 d\tilde{\tau}_0^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2. \tag{9.27}$$

Wartość interwału pomiędzy ustalonymi zdarzeniami oczywiście się nie zmienia, natomiast to, że w układzie inercjalnym wyrażenie na interwał opisane jest zmienionym wzorem, jest odzwierciedleniem faktu, że układy inercjalne różnią się od nieinercjalnych.

Bardzo interesujący jest czynnik, który szpeci przekształcony interwał. Zwróćmy bowiem uwagę, że zgodnie ze wzorem (9.22) jest on równy:

$$\frac{a_0 \tilde{x}}{c^2} c d\tilde{\tau}_0 = c d\tilde{\tau}, \tag{9.28}$$

gdzie $d\tilde{\tau}$ jest upływem czasu na zegarze umieszczonym w położeniu $\tilde{x}$. By się o tym przekonać, wystarczy do wzoru (9.22) wstawić $g = a_0$ oraz wyrażenie na odległość pomiędzy zegarami $h = \tilde{x} - \frac{c^2}{a_0}$. W tak dobranych zmiennych, interwał czasoprzestrzenny przetransformowany do układu przyspieszonego przyjmuje postać

$$ds^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2. \tag{9.29}$$

Wydawać by się mogło, że w tych zmiennych transformacja pomiędzy układami musi być zwykłą transformacją Lorentza, która, jak łatwo się domysleć, odpowiadałaby przekształceniu współrzędnych (ct, x) do układu chwilowo współporuszającego się z przyspieszonym zegarem umieszczonym w położeniu $\tilde{x} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$. Jednakże dla każdego punktu (ct, x) transformacja musiałaby być inna, bo każdy zegar nieruchomy w rakiecie porusza się z inną prędkością w układzie inercjalnym. To zaś przeczyłoby liniowości przekształcenia.

9.8 RUCH SWOBODNY WEDŁUG OBSERWATORA PRZYSPIESZONEGO

Zbadajmy, jak przebiega ruch słoika z bigosem lewitującego gdzieś swobodnie w stanie nieważkości, z punktu widzenia Gawła, który porusza się z przyspieszeniem g . Przyjmijmy, że w chwili początkowej, gdy prędkość rakiety wynosiła zero, Gaweł był tuż obok słoika. Wówczas diagram czasoprzestrzenny przedstawiający dalszy bieg wydarzeń w układzie, w którym słoik spoczywa, znajduje się na rysunku 9.2.

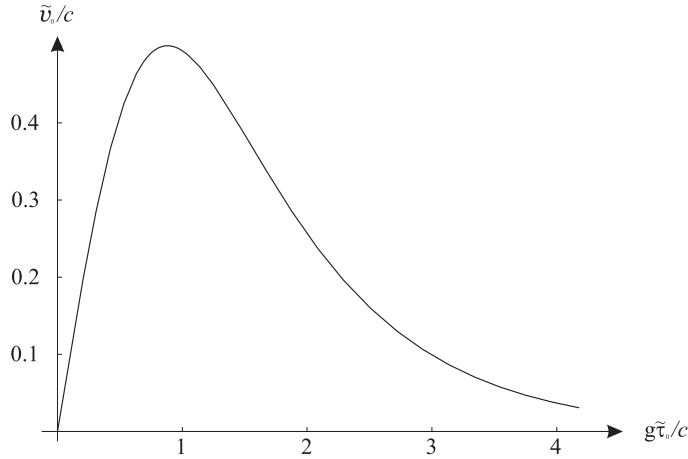
Sprawdźmy najpierw, w jakim tempie starzeje się słoik z punktu widzenia Gawła. Przekształcając pierwszy wzór transformacyjny (9.25) i wstawiając do niego $x = \frac{c^2}{g}$ otrzymujemy

$$t = \frac{c}{g} \operatorname{tgh} \left(\frac{g\tilde{\tau}_0}{c} \right). \quad (9.30)$$

Zgodnie z wnioskami uzyskanymi wcześniej, według Gawła słoik nigdy się nie przeterminuje, bo dla każdego $\tilde{\tau}_0$ mamy $t < \frac{c}{g} < 1$ rok. Psucie się bigosu w miarę zbliżania się do horyzontu będzie stopniowo spowalniać, aż wreszcie słoik majestatycznie zatrzyma swoje starzenie tuż nad czeluścią. Kolejnym równaniem wartym zbadania jest równanie toru słoika bigosu w układzie Gawła. Wstawiając do drugiego wzoru transformacyjnego (9.25) rezultat (9.30) oraz $x = \frac{c^2}{g}$ dostajemy:

$$\tilde{x} = \frac{c^2/g}{\cosh \left(\frac{g\tilde{\tau}_0}{c} \right)}. \quad (9.31)$$

Znów widzimy, że nawet, gdy Gaweł będzie czekać nieskończenie długo, słoik nie oddali się od niego bardziej niż na odległość horyzontu zdarzeń, za którym nigdy się nie zanurzy. Prędkość bigosu względem Gawła:



Rysunek 9.5: Prędkość poruszającego się swobodnie bigosu względem przyspieszającego Gawła jako funkcja czasu wskazywanego przez zegar Gawła. Maksymalna prędkość wynosząca dokładnie $\frac{c}{2}$ osiągnięta jest mniej więcej po czasie $\frac{c}{g}$.

$$\tilde{v}_0 = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\tau}_0} = -c \frac{\sinh\left(\frac{g\tilde{\tau}_0}{c}\right)}{\cosh^2\left(\frac{g\tilde{\tau}_0}{c}\right)}, \quad (9.32)$$

nazywa się *prędkością współrzędnościową*, a jej wykres przedstawiono na rysunku 9.5. Wiadać na nim, że początkowo słoik stopniowo się rozpędza, lecz po upływie czasu $\frac{c}{g} \operatorname{arcsinh}(1) \approx \frac{c}{g}$ prędkość osiąga maksymalną wartość równą dokładnie połowie prędkości światła, po czym na skutek spowolnionego upływu czasu zmniejsza się, by w granicy spowolnić do zera zatrzymując słoik tuż przed horyzontem zdarzeń. Przypomnijmy, że w inercjalnym układzie bigosu nie dzieje się „w tym czasie” zupełnie nic szczególnego.

Określenie prędkości $\tilde{v}_0$ przymiotnikiem „współrzędnościowa” ma podkreślać fakt, że do jej wyznaczenia posłużyliśmy się wskazaniem odległego zegara Gawła wyznaczającego czas współrzędnościowy, a nie zegara, który w danej chwili mijany jest przez słoik. W układzie inercjalnym byłoby wszystko jedno, bo zegary raz zsynchronizowane pozostają zsynchronizowane już na zawsze. Jednakże tu mamy do czynienia z układem nieinercjalnym, w którym powyższy fakt nie zachodzi. Dlatego, gdybyśmy posłużyli się wskazaniem lokalnego, chwilowo mijanego przez słoik zegara uzyskalibyśmy całkiem inną wartość prędkości. Czas takiego zegara będziemy określać mianem *lokalnego czasu własnego*. Prędkość $\tilde{v}$ zdefiniowaną jako zmianę odległości podzieloną przez upływ czasu na lokalnie mijanym

zegarze nazywać będziemy *prędkością lokalną*. W rozważanym przypadku jest ona równa:

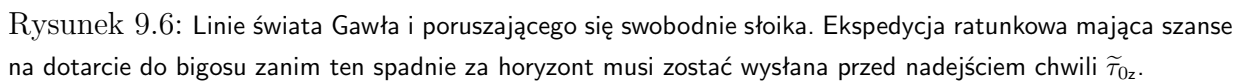
$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{\tau}} = \frac{\tilde{v}_0}{g\tilde{x}/c^2} = -c\sqrt{1 - \frac{g^2\tilde{x}^2}{c^4}}. \quad (9.33)$$

Zatem gdy słoik wraz z cenną zawartością zbliżają się do horyzontu, wówczas prędkość lokalna $\tilde{v}$ dąży do prędkości światła, a nie maleje do zera, jak miało to miejsce w wypadku prędkości współrzędnościowej $\tilde{v}_0$. Prędkość lokalna jest prędkością, z jaką zegary układu nieinercyjnego mijają inercyjnego obserwatora „spadającego” swobodnie w rakiecie. Zatem właśnie tej prędkości (a nie prędkości współrzędnościowej) realnie doświadcza swobodny obserwator podczas swojego spadku.

Przekonaliśmy się, w jaki sposób porusza się swobodny, punktowy obiekt okiem obserwatora jednostajnie przyspieszonego. Do kompletu informacji o kinematyce opisywanej przez rindlerowskiego obserwatora jednostajnie przyspieszonego brakuje nam analizy skrócenia Lorentza. Rozważmy swobodny pręt o długości L , którego końce w inercyjnym układzie odniesienia spoczywają w położeniach $x_B = \frac{c^2}{g}$ i $x_A = \frac{c^2}{g} - L$. Położenia obu końców w układzie nieinercyjnym mierzymy w ustalonej chwili $\tilde{\tau}_0$. Z drugiego wzoru transformacyjnego (9.26) mamy dla obu końców, odpowiednio $\tilde{x}_B = \frac{c^2/g}{\cosh(g\tilde{\tau}_0/c)}$ i $\tilde{x}_A = \frac{c^2/g-L}{\cosh(g\tilde{\tau}_0/c)}$, a zatem długość pręta $\tilde{L}$ wynosi:

$$\tilde{L} = \tilde{x}_B - \tilde{x}_A = \frac{L}{\cosh\left(\frac{g\tilde{\tau}_0}{c}\right)}. \quad (9.34)$$

Oznacza to, że w miarę upływu czasu Gawła pręt będzie się coraz bardziej skracał, by dotarłszy do horyzontu rozpląszczyć się na nim jak naleśnik. Na koniec spytajmy jeszcze, w jaki sposób puścić końce pręta poruszającego się wraz z rakieta, by uniknąć pojawienia się naprężeń w dalszej fazie ruchu. Czy możemy je puścić jednocześnie w układzie Gawła, czy też puszczać je należy w ustalonym odstępnie czasu? Odpowiedź na to pytanie jest banalna, gdy rozważymy układ inercyjny, w którym w chwili puszczenia rakietę w całości spoczywa (wnioski będą oczywiście ogólne, bo żadna chwila w rakiecie nie jest wyróżniona). Wówczas płaszczyzna równoczesności Gawła pokrywa się z osią x , czyli płaszczyzną równoczesności układu inercyjnego. Widzimy zatem, że Gawł powinien puścić oba końce jednocześnie, by zagwarantować, że pręt, który również w rozważanym układzie spoczywa i ma długość L pozostał w spoczynku.



Powiedzieliśmy, że z punktu widzenia Gawła bigos nigdy nie wpadnie za horyzont zdarzeń, choć z punktu widzenia bigosu horyzont zostanie przekroczony po upływie czasu $\frac{c}{a}$. Jest to skrajny przykład względności czasu – zwykła dylatacja znana z ruchów inercjalnych się do tego nie umywa. Czy jest zatem możliwe, żeby Gawł mógł w dowolnej chwili odzyskać słoń z bigosem? Chociażby wysyłając ze swojej rakiety misję ratunkową, której celem ma być dostarczenie słoika z powrotem znad horyzontu? Z całą pewnością bigos od momentu przekroczenia horyzontu może się czuć bezpiecznie – nie zostanie przez Gawła pożarty. Ale zanim ta chwila nie nastąpi czy bigos powinien przez cały czas trwać w niepewności? Sytuację ilustruje rysunek 9.6. Otóż, jeśli Gawł w układzie słoika nie zdecyduje się na wysłanie misji ratunkowej przed upłynięciem czasu własnego $\tilde{\tau}_{0z} = \frac{c}{a} \log 2$, który minął w rakiecie Gawła od chwili upuszczenia bigosu, to żaden obiekt podświetlony wysłany później nie zdąży już do bigosu dotrzeć. Jeśli na przykład słoik naładowano ładunkiem elektrycznym i Gawł może w swej rakiecie w dowolnej chwili włączyć pole elektryczne przyciągające przysmak w kierunku rakiety, to włączenie tego pola w układzie rakiety później niż w chwili $\tilde{\tau}_{0z} = \frac{c}{a} \log 2$ nie zdoła sprowadzić bigosu przed oblicze Gawła. Jest tak dlatego, że informacja o zmianie pola nie może propagować się z prędkością przekraczającą c (zagadnienie to w szczegółach opiszemy w rozdziale 11). Oznacza to, że jeśli Gawł nie zdecyduje się ratować bigosu odpowiednio szybko, to będzie musiał pozostać głodny. Dla przyspieszenia rakiety równego g Gawł ma niecałe 9 miesięcy od pożegnania z bigosem

na to, żeby urodziła się w jego głowie męska decyzja.

Czas $\tilde{\tau}_{0z}$ określa również graniczną chwilę, przed upłynięciem której Gawł może wysłać słoikowi wiadomość licząc na odpowiedź, co powinno w sposób przekonujący wynikać z rysunku 9.6. Każdy sygnał wysłany po upływie $\tilde{\tau}_{0z}$ pozostanie już niestety bez odpowiedzi mimo, że formalnie bigos wciąż nie wpadł za horyzont. Gawł stwierdzi po prostu, że wysyłane w kierunku bigosu sygnały również zastygną w drodze do celu i dlatego nie będą w stanie osiągnąć go w skończonym czasie. Natomiast, zdaniem słoika, sygnały wysyłane przez Gawła dotrą do niego, jednak stanie się to już za horyzontem zdarzeń i bigos nie będzie mógł dostarczyć Gawłowi odpowiedzi. Wnioski, które tu wyciągnęliśmy nie oznaczają bynajmniej, że obiekty tuż przy horyzoncie zdarzeń są całkowicie poza zasięgiem układu nieinercyjnego. Bigos może bowiem w dowolnej chwili włączyć silnik rakietowy unikając wpadnięcia za horyzont, dopóki wciąż znajduje się przed nim. Bigos może także wysłać sygnały w kierunku Gawła i będą one doń docierać, bowiem komunikacja między nimi zerwana jest tylko jednostronnie. Prosta zawierająca ostatni sygnał od Gawła docierający do bigosu, zaznaczony na rysunku 9.6 kropkowaną linią, wyznacza granicę po przekroczeniu której każdy punkt rakiety utraci dwustronną łączność ze swobodnie spadającym słoikiem.

9.10 ENERGIA SWOBODNEJ CZĄSTKI

Czy energia (8.13) swobodnej cząstki lub swobodnego słoika bigosu obserwowanego w układzie nieinercyjnym są zachowane? Musielibyśmy najpierw doprecyzować jak rozumieć prędkość występującą w wyrażeniach (8.13). Czy chodzi o prędkość współrzędnościową, a może o prędkość lokalną? Ptak czy owad, w obu przypadkach energia nie będzie zachowana. Na przykład spoczywający w pewnym inercyjnym układzie słoik bigosu, z punktu widzenia Gawła rozpędzającego się rakieta, porusza się coraz szybciej. Jego energia określona pierwszym wyrażeniem (8.13) zmienia się. W teorii nierelatywistycznej mówimy w tym kontekście o *siłach pozornych*, takich jak *siła bezwładności*, *siła odśrodkowa*, czy *siła Coriolisa* działających na cząstkę w układzie nieinercyjnym. W teorii względności bardziej elegancko, a przede wszystkim o wiele wygodniej jest ominąć pojęcie siły i skupić się bezpośrednio na energii chociażby dlatego, że dość podejrzanie brzmiałyby dywagacje na temat siły działającej na promień światła. Czy można zatem znaleźć taką modyfikację wyrażenia na energię (8.13), ażeby w układzie nieinercyjnym Gawła energia swobodnej cząstki była zachowana? Owszem, można, a oto pierwszy możliwy sposób (kolejne, ogólniejsze wkrótce).

Powróćmy do równania (9.33), łączącego położenie w układzie nieinercyjnym swobodnie poruszającej się cząstki z jej prędkością lokalną. Proste przekształcenie tego wzoru prowadzi do:

$$\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}} = \frac{g\tilde{x}}{c^2}, \quad (9.35)$$

Oznacza to, że iloraz prawej i lewej strony równania jest stałą ruchu swobodnego. Rzeczywiście, możemy wprowadzić tajemniczą wielkość $\tilde{E}$ charakteryzującą ruch swobodny cząstki o masie m w układzie nieinercyjnym zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{E} = \frac{mg\tilde{x}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/c^2}}, \quad (9.36)$$

która będzie stałą wynoszącą mc^2 . Czy tak zdefiniowaną wielkość możemy nazwać energią i dlaczego? Ażeby odpowiedzieć na to pytanie przypomnijmy, czym była energia dla obserwatora inercyjnego. Była ona proporcjonalna do pochodnej zerowej składowej czteropolożenia (czyli czasu) po interwale czasoprzestrzennym wzdłuż toru. Wiemy zaś, że zerowa składowa czteropolożenia spoczywającej cząstki wyznaczona jest w układzie przyspieszonym równaniem (9.30), a interwał w tym układzie ma postać (9.29), zatem ze współmienniczości wyrażenia na energię wynika:

$$\tilde{E} = mc^2 \frac{cdt}{ds} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/c^2}} \frac{g^2 \tilde{x}^2 d\tilde{\tau}_0}{c^4 d\tilde{\tau}} = \frac{mg\tilde{x}}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/c^2}}, \quad (9.37)$$

gdzie w pierwszej równości skorzystaliśmy ze związku (9.31), a w ostatniej z (9.28).

W kolejnym rozdziale przedyskutujemy w bardziej intuicyjny sposób, dlaczego akurat wyrażenie (9.36) musi być stałe w trakcie ruchu swobodnego. Teraz natomiast zwróćmy tylko uwagę, że prędkością, która w dogodny sposób parametryzuje energię jest prędkość lokalna, a nie współrzędnościowa. Ponadto energia zależy od położenia cząstki, co nie powinno nas dziwić. W końcu w przypadku nierelatywistycznym mamy w podobnej sytuacji do czynienia z energią potencjalną, która również ma w sobie zależność od położenia. Nie da się już ukryć, że rozważana przez nas rzeczywistość widziana oczami obserwatora nieinercyjnego coraz bardziej kojarzy się z rzeczywistością obserwatora inercyjnego znajdującego się w zasięgu pewnej zewnętrznej siły potencjalnej. Penetrację intelektualną tego tematu pogłębimy w kolejnym rozdziale. Tymczasem dla ochłonięcia uporządkujmy kilka dyskutowanych wcześniej zagadnień.

9.11 ZNACZENIE WIELKOŚCI LOKALNYCH

Skrócenie poruszającego się obiektu w kierunku ruchu dane równaniem (9.34) parametryzowane jest czasem odległego zegara Gawła. Dla obiektów o skończonych rozmiarach nie możemy postąpić inaczej, gdyż każdy ich element porusza się z inną prędkością i mijają inny lokalny zegar. Jednakże dla ciał o infinitezymalnych długościach dL możemy przyjąć, że w całości znajdują się one w położeniu $\tilde{x}$ i poruszają z lokalną prędkością $\tilde{v}$. Czy nie lepiej byłoby zatem użyć wielkości lokalnych do opisu skrócenia Lorentza i dylatacji czasu?

Rozpocznijmy od argumentacji heurystycznej. Swobodnie poruszający się obiekt mijający zegar umieszczony w przyspieszającej rakiecie stwierdza, że zegar ten jest krótszy i chodzi wolniej niż gdyby spoczywał. Dokładnie ten sam wniosek wyciągnie obserwator nieinercjalny siedzący na mijanym przez ciało zegarze, którego utożsamiamy z obserwatorem inercjalnym chwilowo współporuszającym się. Według tego obserwatora to swobodnie poruszające się ciało będzie krótsze o czynnik lorentzowski, a poruszający się z nim zegar będzie chodzić wolniej. Prędkość z jaką rozważane ciała się mijają to lokalna prędkość $\tilde{v}$. Oczekujemy zatem, że jeśli swobodnie poruszający się obiekt ma długość dL , to w układzie nieinercjalnym długość ta wyniesie

$$d\tilde{L} = \sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}} dL, \quad (9.38)$$

natomiast upływ czasu na poruszającym się swobodnie zegarze dt z punktu widzenia poruszającego się z przyspieszeniem zegara odmierzającego lokalny czas $d\tilde{\tau}$ dany będzie relacją

$$d\tilde{\tau} = \frac{dt}{\sqrt{1 - \tilde{v}^2/c^2}}. \quad (9.39)$$

Możemy się łatwo przekonać, że nasze wnioski są jak najbardziej poprawne. By wyprowadzić pierwszy wzór należy wstawić równanie toru spadającego punktu (9.31) do wzoru na skrócenie Lorentza (9.34) i skorzystać ze związku pomiędzy położeniem a prędkością lokalną (9.35). Natomiast drugi wzór możemy dostać biorąc różniczkę wyrażenia (9.30) i wstawiając do niej (9.31) oraz (9.35). Jeśli jednak dobrze rozumiemy konstrukcję myślową na której zbudowaliśmy strukturę układu jednostajnie przyspieszonego, to żadne podstawienia nie powinny nam być potrzebne i dwa powyższe wzory powinny być dla

nas oczywiste. Wyrobiecie sobie dobrych intuicji dotyczących układu jednostajnie przyspieszonego okaże się w przyszłości nieocenione, gdy przejdziemy do rozważania zupełnie dowolnych układów nieinercjalnych. Warto zatem poświęcić chwilę na dobre zrozumienie przedstawionej powyżej argumentacji.

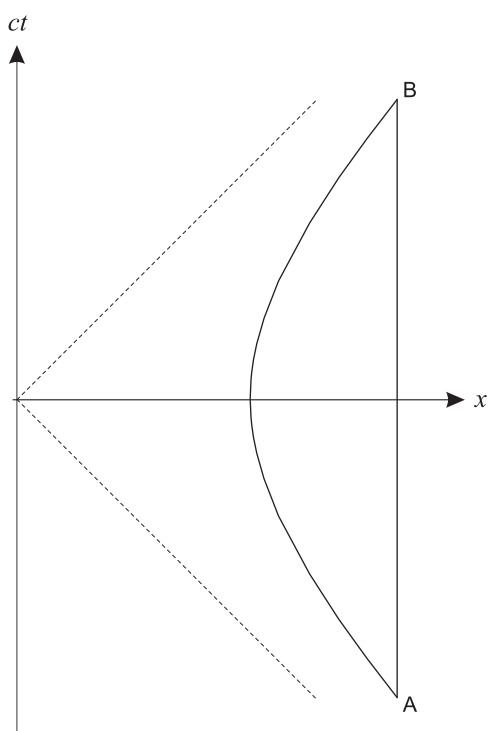
Nasze wyniki pokazują dobitnie, że to czas na lokalnym zegarze $\tilde{\tau}$ i w konsekwencji prędkość lokalna $\tilde{v}$ są wielkościami mającymi istotne znaczenie w opisie ruchu w układzie nieinercjalnym. Tylko bowiem one, a nie odległy zegar Gawła wskazujący czas $\tilde{\tau}_0$, opisują rzeczywistą charakterystykę czasoprzestrzeni lokalnie, w pobliżu obserwowanego ciała i to one powinny stanowić istotną fizycznie parametryzację ruchu.

9.12 PARADOKS BLIŹNIĄT OKIEM PAWŁA

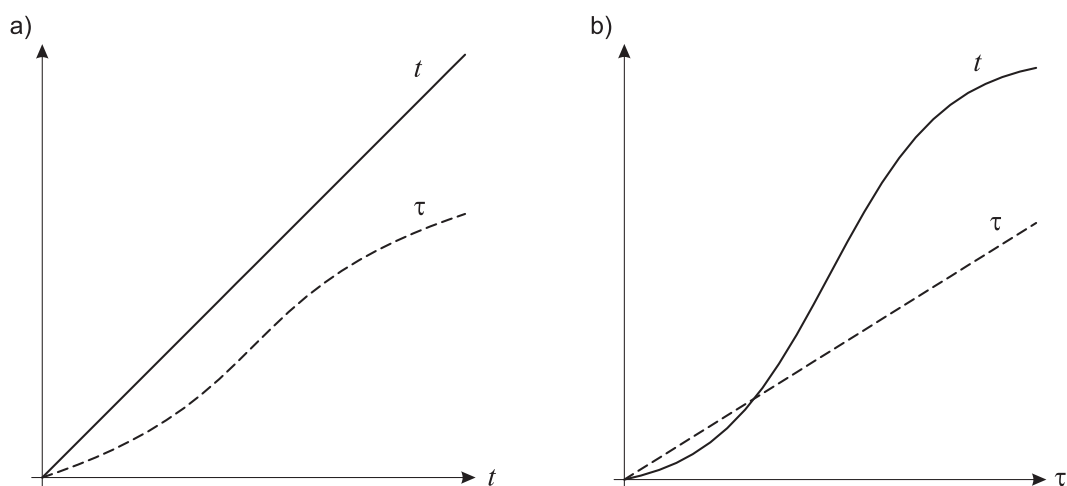
Wypracowaliśmy sobie przybornik pojęciowy, który pozwoli nam powrócić do paradoksu bliźniąt omówionego w rozdziale 2.7 i zrozumieć go nieco głębiej. Wybierzemy sobie konkretny tor, po którym porusza się rakietą Pawła i zbadamy szczegółowo sytuację zarówno z punktu widzenia Gawła znajdującego się w inercjalnym układzie stacji kosmicznej, jak i Pawła podróżującego rakieta. Najłatwiej będzie nam rozważyć tor rakiety, która przez cały czas porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym (9.13). Przyjmijmy, że w momencie, gdy bracia się rozdzielili synchronizując swoje zegary, rakietą Pawła wystartowała z niezerową prędkością, którą jednostajnie zmniejszała, by w kulminacyjnym punkcie zawrócić i odtąd zbliżać się do Gawła ze wzrastającą jednostajnie prędkością, jak pokazuje to rysunek 9.7.

Rozpocznijmy od prześledzenia, jak upływał czas własny w rakiecie Pawła z punktu widzenia Gawła pozostającego w spoczywającej stacji kosmicznej. Sprawa jest banalna – wystarczy podstawić wzór (9.12) do równania (2.11) i gotowe. Już zresztą raz to zrobiliśmy otrzymując wyrażenie (9.20), w którym musimy już tylko „wyzerować” oba zegary w momencie, gdy bliźniacy się rozdzielali oraz wybrać konkretną wartość przyspieszenia Pawła i położenia Gawła. Wykres zależności czasu własnego upływającego w rakiecie od czasu Gawła pomiędzy startem i powrotem zaznaczyliśmy linią przerywaną na rysunku 9.8a). Dla porównania umieściliśmy na nim również równomierny upływ czasu na zegarze Gawła zaznaczony linią ciągłą. Tym razem bez niespodzianek, powracający bliźniak jest rzeczywiście młodszy.

Prześledźmy teraz przebieg wydarzeń z punktu widzenia Pawła wyekspediowanego ra-



Rysunek 9.7: Linie świata Gawła (prosta), i Pawła (hiperbola)



Rysunek 9.8: Upływ czasu pomiędzy dwoma spotkaniami Gawła znajdującego się w układzie inercyjnym (linia ciągła) i Pawła poruszającego się z jednostajnym przyspieszeniem (linia przerywana) z punktu widzenia a) Gawła, b) Pawła, który używa czasu współrzędnościowego. Na wykresach użyto jednostek bezwymiarowych, przy czym obydwie linie proste obrazują równomierny upływ czasu w swoich układach odniesienia.

kietą w kosmos. W tym celu najlepiej posłużyć się transformacją Rindlera, a konkretnie pierwszym wzorem (9.25). Ponownie musimy zadbać o to, żeby w chwili rozdzielenia obydwu zegary wskazywały godzinę „zero”. Po wykonaniu elementarnych przekształceń otrzymujemy wykres przedstawiający upływ czasu na obu zegarach z punktu widzenia nieinercyjnego układu rakiety – rysunek 9.8b). Jak widać, Paweł początkowo obserwuje dylatację czasu brata, jednak wraz z rozwojem sytuacji efekt nieinercyjności jego układu daje coraz mocniej o sobie znać. W wyniku tego, spoczywający na stacji kosmicznej Gaweł przegania swym wiekiem podróżującego brata i tę niechlubną przewagę zachowuje już do samego końca mimo, że w ostatniej fazie ruchu tempo starzenia Gawła ponownie wchodzi w fazę dość mocnej dylatacji. Porównując ze sobą wykresy 9.8a) i 9.8b) widzimy, że w obu układach odniesienia, w chwili ponownego spotkania nie dojdzie do żadnej sprzeczności. Obydwaj obserwatorzy potwierdzą poprawność wskazań mijających się ponownie zegarów.

Na koniec zauważmy, że ciekawa sytuacja mogłaby mieć miejsce, gdyby zwracający Paweł w połowie drogi zmienił zdanie i postanowił ponownie zacząć oddalać się od Gawła. Dla odpowiednio dużego przyspieszenia mogłoby dojść do sytuacji, że w fazie przyspieszania Gaweł stawałby się według Pawła coraz młodszy. Sytuacja taka pojawiłaby się, gdyby Gaweł na jakiś czas znalazł się za wytworzonym w wyniku przyspieszania horyzontem zdarzeń Pawła.

Pytania

- Czym jest relatywistyczny ruch jednostajnie przyspieszony?
- Jak w układzie spoczywającym musi zmieniać się w czasie siła działająca na cząstkę, ażeby cząstkę tę wprowadzić w ruch jednostajnie przyspieszony? A w układzie związanym z cząstką?
- Czy prawdą jest, że obiekt startujący z pewnego punktu i poruszający się relatywistycznym ruchem jednostajnie przyspieszonym może być dogoniony przez światło opuszczające ten punkt w dowolnej, późniejszej chwili?
- W jaki sposób upuścić w rakiecie różne punkty „sztywnego” ciała, ażeby zaczęło się ono poruszać ruchem swobodnym bez indukowania napięć wewnętrznych?

- Obserwator znajdujący się w przyspieszającej rakiecie wysyła promień światła w kierunku horyzontu zdarzeń. Czy według tego obserwatora światło kiedykolwiek przekroczy horyzont, czy zatrzyma się nad nim?
- Jaka jest różnica pomiędzy prędkością współrzędnościową, a prędkością lokalną? Dlaczego w definicji energii zdecydowaliśmy się użyć prędkości lokalnej?
- Czy prędkość współrzędnościowa może być większa od prędkości światła? Jeśli nie, podaj dowód, jeśli tak, podaj przykład.
- W nieinercyjnym układzie rakiety żadna chwila czasu nie jest wyróżniona, ale punkty na różnych wysokościach rakiety różnią się od siebie – na przykład panującym w nich przeciążeniem. Co wprowadza tę asymetrię?

Zadania

- Wyznacz bezpośrednią zależność $\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{s})$ w równaniu (9.3) i wykaż współzmienniczość czteroprzyspieszenia.
- Oblicz trzecią pochodną czteropolożenia po czasie własnym i sklasyfikuj otrzymany wynik posługując się bazą (8.23). Od ilu niezależnych parametrów zależy wyprowadzony wzór? Jak byłoby w przypadku wyższych pochodnych? Znajdź bezpośrednią zależność wyprowadzonych parametrów od parametrów charakteryzujących bazę czterowektorów (8.23).
- Wyprowadź wzór podany w rozdziale 9.9, opisujący czas, jaki ma Gaweł na podjęcie decyzji o odzyskaniu słoika z bigosem. Ile ten czas wynosi?
- W którym punkcie rakiety może upłynąć maksymalny czas własny od momentu wypuszczenia przez Gawła słoika, dla którego możliwe jest jeszcze podjęcie skutecznej próby odzyskania go?
- Wyprowadź nierelatywistyczny wzór na energię cząstki o masie m w nieinercyjnym układzie odniesienia poruszającym się z jednostajnym przyspieszeniem a .
- Obserwator znajdujący się w przyspieszanej rakiecie wysyła sygnał świetlny w kierunku lustra znajdującego się nieruchomo na czubku rakiety. Po upływie czasu $\Delta\tilde{\tau}_0$

odbite światło powraca do obserwatora. Na jakiej wysokości $\Delta\tilde{x}$ znajduje się lustro? Czy otrzymujemy standardowy wzór $\Delta\tilde{x} = \frac{c\Delta\tilde{\tau}_0}{2}$? Co można na tej podstawie powiedzieć na temat współrzędnościowej i lokalnej prędkości światła w układzie nieinercyjnym?

- Obserwator znajdujący się w przyspieszanej rakiecie wysyła sygnał świetlny w kierunku horyzontu zdarzeń. Oblicz zależność prędkości współrzędnościowej sygnału od czasu współrzędnościowego rozważanego obserwatora i przedstaw ją na wykresie. Następnie przeprowadź analogiczne rachunki dla prędkości lokalnej zależnej od odległości od horyzontu.
- Dla sygnału światła z poprzedniego zadania wyznacz zależność częstości światła od czasu współrzędnościowego przyjmując, że obserwator nieinercyjny dysponuje źródłem światła o częstości ν_0 .
- Wyznacz kształt stożka przyszłości dowolnego zdarzenia widzianego w układzie jednostajnie przyspieszonym.
- Podaj równania relatywistycznego rzutu ukośnego w nieinercyjnym układzie przyspieszającej rakiety.

Rozdział 10

ZAKRZYWIONA CZASOPRZESTRZEŃ

Przekonaaliśmy się, że zagadnienie nieinercjalnego układu jednostajnie przyspieszonego jest o wiele bogatsze, niż w wersji nierelatywistycznej. To już nie tylko pojawiające się siły pozorne, ale również horyzont zdarzeń i zmienny upływ czasu na różnych wysokościach. A jak sprawy się mają w innych nieinercjalnych układach – czy pojawia się może jakiś przestrzenny odpowiednik zmiennego upływu czasu? Jakie są ogólne własności pozornej siły pojawiającej się w nieinercjalnych układach odniesienia? W tym rozdziale jeszcze kilka rzeczy nas z pewnością zaskoczy, a zwieńczeniem wysiłków będzie *czarna dziura* na deser.

10.1 METRYKA ZAKRZYWIONEJ CZASOPRZESTRZENI

Rozważmy dwa układy odniesienia – spoczywający K oraz K' obracający się ze stałą prędkością kątową wokół osi z' , przy czym osie z i z' pokrywają się*. Obserwator inercjalny K badając okrąg, którego oś symetrii pokrywa się z osią z stwierdzi, że stosunek długości obwodu do średnicy wynosi dokładnie π . W tym celu może on dokonać pomiaru układając wzdłuż obwodu n sztywnych prętów, o długości dużo mniejszej niż średnica okręgu.

Zastanówmy się, co w tej sprawie ma do powiedzenia obserwator nieinercjalny K' . Jeśli on również ułoży wzdłuż okręgu n' sztywnych prętów, identycznych z poprzednimi, to $n' > n$, gdyż każdy pręt doznaje skrócenia Lorentza w kierunku chwilowego ruchu. Efekt ten nie występuje natomiast w trakcie pomiarów średnicy. Oznacza to, że obserwator nieinercjalny K' uzna na podstawie wykonanych przez siebie pomiarów, że stosunek obwodu

*W niniejszym rozdziale wszystkie wielkości opisywane będą w nieinercjalnych bądź krzywoliniowych układach odniesienia, jednak dla uproszczenia notacji nie będziemy tego już podkreślać symbolem tyldy.

okręgu do jego średnicy jest większy niż π . To zaś musi oznaczać, że przestrzeń w jego układzie odniesienia nie jest *przestrzenią euklidesową*. Zatem do wyznaczenia odległości pomiędzy dwoma punktami musi on użyć pewnej nietrywialnej *metryki przestrzennej*.

Również zegar umieszczony nieruchomo w układzie K' na obwodzie okręgu musi chodzić wolniej, niż zegar umieszczony w początku układu współrzędnych. Podobne zjawisko odkryliśmy już w układzie jednostajnie przyspieszonym. W sytuacji, gdy zarówno upływ czasu, jak i odległości w przestrzeni różnią się od ich odpowiedników w układach inercjalnych mówimy o *zakrzywionej czasoprzestrzeni*. Do ilościowego opisu tego zakrzywienia służy pojęcie *metryki czasoprzestrzeni*, będącej bezpośrednim uogólnieniem pojęcia znanego z topologii. Otarliśmy się już o nie, jednak wówczas nie poświęciliśmy mu dostatecznej uwagi. Jak wiemy, miarą odległości pomiędzy zdarzeniami w czasoprzestrzeni jest interwał. W układach inercjalnych ma on niezmienną, elegancką formę, jednakże dla obserwatorów nieinercjalnych wyrażenie określające interwał może się nieco skomplikować, co unaocznilo nam wyrażenie (9.27). W ogólności interwał czasoprzestrzenny w nieinercjalnym układzie, którego zegary i osie poruszają się w dowolnie skomplikowany sposób wijąc się rozmaicie, może przyjąć postać:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (10.1)$$

gdzie dx^μ jest μ -tą składową różniczki czteropolożenia $\mathbf{r}^\mu$, a $g_{\mu\nu}$ jest metryką czasoprzestrzeni charakteryzującą układ nieinercjalny. Staje się dla nas oczywiste, że metryka $g_{\mu\nu}$ musi się w ogólności różnić od metryki Minkowskiego $\eta_{\mu\nu}$ (8.3) charakteryzującej układy inercjalne. Na przykład metryka rindlerowskiego obserwatora jednostajnie przyspieszonego wzdłuż osi x ma postać (9.27):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_0^2 x^2 / c^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

A jak bardzo skomplikowana może być metryka w ogólności? Zastanówmy się – metryka to 16 elementów macierzy 4×4 , jednak macierz ta powinna być symetryczna $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, zatem zostaje 10 elementów. Ponadto, czasoprzestrzeń możemy opisywać różnymi układami

współrzędnych. Trójwymiarowa przestrzeń może być opisana w układzie kartezjańskim, sferycznym, walcowym i nieskończenie wielu innych. Mamy zatem możliwość przekształcenia metryki czasoprzestrzeni czterowymiarową transformacją, która pozwala wyeliminować cztery dodatkowe stopnie swobody macierzy. Reasumując – metryka jest jednoznacznie określona z dokładnością do czterowymiarowej transformacji poprzez podanie 6 funkcji, które w ogólności mogą zależeć od współrzędnych opisujących zdarzenia w czasoprzestrzeni x^μ .

Zbadajmy teraz dokładniej, w jaki sposób metryka układu nieinercjalnego opisuje relacje czasowe i przestrzenne pomiędzy różnymi zdarzeniami obserwowanymi w tym układzie. Oznaczmy współrzędne stosowane przez pewnego obserwatora jako (x^0, x^1, x^2, x^3) , przy czym należy je rozumieć nie jako „rzeczywisty” czas i przestrzeń w układzie nieinercjalnym, lecz jako dowolną numerację zdarzeń w czasoprzestrzeni*. Zaczniemy od sprawdzenia, jak biegnie prawdziwy czas na zegarze w pewnym punkcie czasoprzestrzeni opisywanej metryką $g_{\mu\nu}$. Przyjmujemy, że w rozważanym układzie zegar jest nieruchomy, zatem $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Wówczas interwał pomiędzy zdarzeniami proporcjonalny jest do czasu własnego, który pomiędzy tymi zdarzeniami upłynął, czyli:

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (10.3)$$

Jak widać, powyższe wyrażenie ma sens, jeśli $g_{00} > 0$. Warunek ten musi być spełniony, o ile życzymy sobie, by na każdym zegarze upływ czasu był zawsze dodatni.

Zbadajmy teraz jakie są rzeczywiste, lokalne odległości przestrzenne pomiędzy zdarzeniami w nieinercjalnym układzie odniesienia. Dla uproszczenia, ograniczymy się wyłącznie do metryki, której elementy $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$. Wówczas zarówno wyrażenie określające interwał, jak i cała niezbędna analiza istotnie się upraszczają i dwa jednocześnie zdarzenia oddzielone są odległością dl daną jako:

$$dl^2 = -g_{ij} dx^i dx^j, \quad (10.4)$$

gdzie rzymskie indeksy i, j , w odróżnieniu od greckich μ, ν przebiegają zbiór liczb 1, 2, 3. Uzyskane wyniki pozwalają nam nabrać nieco wyczucia co do interpretacji elementu me-

*Mamy tu pełną analogię z krzywoliniowymi układami w trójwymiarowej przestrzeni. Dla przykładu, w układzie sferycznym kąt ϕ nie określa przecież rzeczywistej odległości od czegokolwiek, służy on jedynie do wygodnego numerowania punktów przestrzeni.

tryki g_{00} oraz części przestrzennej g_{ij} , jako wielkości określających upływ lokalnego czasu własnego i lokalnej, rzeczywistej odległości. Warto byłoby zrozumieć rolę elementów g_{0i} , które złośliwie utrudniają analizę odległości przestrzennej pomiędzy zdarzeniami. Okazuje się, że nieznikające wyrazy g_{0i} prowadzą do większych komplikacji niż nam się może wydawać, więc dla uproszczenia będziemy rozważać jedynie takie układy współrzędnych, dla których $g_{0i} = 0$. Na szczęście poprzez zwykłą zamianę zmiennych można zawsze wyzerować elementy g_{0i} , zatem przez wprowadzenie odpowiedniej „numeracji” zdarzeń czasoprzestrzeni można doprowadzić metrykę do kultury.

10.2 RUCH SWOBODNY W KRZYWEJ CZASOPRZESTRZENI

Ruch swobodny w układzie inercyjnym wydaje się banalny. Obiekty poruszają się bowiem zawsze po torach prostoliniowych. W układach nieinercyjnych tak oczywiście nie jest i chcielibyśmy poznać metodę, która pozwoliłaby wyznaczać ruch swobodnego ciała w dowolnym układzie odniesienia. Wyobraźmy sobie zatem całą przestrzeń wypełnioną spoczywającymi, zsynchronizowanymi zegarami oraz nieruchome osie kartezjańskich współrzędnych przestrzennych, które wspólnie zadają układ inercjalny K . Dorzucmy do tego drugi zestaw zegarów poruszających się po dowolnie skomplikowanych, ale najlepiej gładkich i nieprzecinających się torach wypełniających całą przestrzeń. Coś na kształt ściśliwego, poruszającego się „płynu zegarów”, z których każdy ma pewne trójwymiarowe „położenie”. Będzie to układ nieinercjalny K' . Dodajmy, że zegary w układzie nieinercyjnym nie muszą nawet chodzić równomiernie. Hulać dusza, piekła nie ma.

Spójrzmy teraz na trajektorię swobodną (czyli tor, który z punktu widzenia układu K jest zwykłą linią prostą) oczami obserwatora nieinercyjnego K' . Dramat. Trajektoria będzie wyczyniać najdziwsze swawole. A jednak kilka sensownych rzeczy na temat ruchu swobodnego w układzie K' powiedzieć można. Zacznijmy od skrócenia Lorentza i dylatacji czasu. Wyobraźmy sobie swobodny zegar A należący do K , o długości spoczynkowej dL , który w pewnej chwili mijany jest przez zegar B należący do układu nieinercyjnego K' . Rzecz jasna, zegar B jest według A skrócony o czynnik Lorentza związany z chwilową prędkością B względem A . I *vice versa*, w układzie nieinercyjnym zegara B długość zegara A wynosi $\sqrt{1 - v^2/c^2}dL$, gdzie v^2 jest kwadratem prawdziwej (lokalnej) prędkości zegara A względem zegara B , danej wzorem:

$$v^2 = \left(\frac{d\mathbf{l}}{d\tau} \right)^2 = -c^2 \frac{g_{ij} dx^i dx^j}{g_{00} (dx^0)^2}. \quad (10.5)$$

Użyliśmy tu współrzędnych, dla których $g_{0i} = 0$ i skorzystaliśmy z równań (10.3) i (10.4). Po raz kolejny powołujemy się tu na postulat zegara, zgodnie z którym lokalna rzeczywistość w układzie K' nie różni się od rzeczywistości obserwatora inercyjnego K'' chwilowo (i lokalnie) współporuszającego się z K' .

Podobnie, upływ czasu dt na zegarze A obserwowany w nieinercyjnym układzie K' zegara B trwać będzie $d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. I znów, pamiętać należy o subtelnej definicji prędkości lokalnej (10.5) użytej w powyższym wzorze. Natomiast struktura wyrażeń określających skrócenie Lorentza i dylatację czasu pozostaje dokładnie taka sama, jak w znanych nam doskonale układach inercyjnych.

Czy w krzywoliniowym układzie nieinercyjnym istnieje jakaś stała ruchu swobodnego, coś co moglibyśmy nazwać energią cząstki swobodnej? Owszem, ale tylko w szczególnych okolicznościach wielkość ta będzie zachowana. Rozważmy dwa idealne zegary A i B należące do nieinercyjnego układu K' i umieszczone w nim w położeniach $\mathbf{r}_A$ i $\mathbf{r}_B$. Lokalizacja zegarów jest taka, że jeśli wypuścić swobodne ciało z położenia $\mathbf{r}_A$, to po pewnym czasie przetnie ono położenie $\mathbf{r}_B$. Innymi słowy $\mathbf{r}_A$ i $\mathbf{r}_B$ leżą na prostej należącej do K . Upuśćmy teraz dwa ciała swobodne bez prędkości początkowej z położenia $\mathbf{r}_A$ w infinitezymalnym odstępzie czasu $d\tau_A$ wskazywanego przez zegar A , co odpowiada odstępowi współrzędnej czasowej $dx^0 = \frac{cd\tau_A}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)}}$. Jeśli elementy metryki nie zależą od współrzędnej x^0 , czyli metryka jest *statyczna*, to rzeczywista odległość pomiędzy zegarami A i B nie zmienia się, a czas współrzędnościowy płynie równomiernie. W tak pięknych okolicznościach przyrody odstęp czasu współrzędnościowego pomiędzy chwilami, w których zegar B mijany będzie przez dwa upuszczone przez nas swobodnie ciała pozostanie niezmienny. Ażeby sobie to uzmysłowić wyobraźmy sobie, że jesteśmy w układzie, którego metryka jest statyczna. Oznacza to, że gdy siedzimy na wybranym zegarze, to żadna chwila czasu nie jest dla nas wyróżniona. Zatem jeśli rzucimy kamieniem w pewien odległy cel o godzinie dla której współrzędna czasowa x_0 wskazuje 12:00 i cel zostanie osiągnięty dla współrzędnej czasowej 12:17, to jeśli rzucimy ponownie drugim kamieniem we współrzędnej czasowej 12:20, to o dla jakiej współrzędnej czasowej cel zostanie osiągnięty? Oczywiście dla współrzędnej wynoszącej 12:37. Żadna współrzędna czasowa nie jest bowiem wyróżniona. Zatem odstęp rzeczywistego czasu na zegarze B pomiędzy chwilami, gdy mijać go będą spadające ciała

wyniesie $d\tau_B = \frac{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)}}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} d\tau_A$.

Przeanalizujmy teraz tę samą sytuację z punktu widzenia układu inercjalnego K . Poruszające się swobodnie ciała opuszczają zegar A współporuszając się z nim chwilowo, natomiast zegar B mija je z pewną prędkością względną $-\mathbf{v}$. W układzie inercjalnym nietrywialność związku pomiędzy czasami $d\tau_A$ i $d\tau_B$ jest konsekwencją dylatacji dla ruchu z prędkością $-\mathbf{v}$: $d\tau_B = \sqrt{1 - v^2/c^2} d\tau_A$. Zauważmy jednak, że w układzie nieinercyjnym to zegar B spoczywa, a ciała poruszają się względem niego z prędkością $\mathbf{v}$, która odpowiada jednak identycznemu czynnikowi Lorentza. Porównując otrzymane związki dostajemy:

$$\frac{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)}}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.6)$$

Gdyby natomiast powtórzyć całe rozumowanie przy założeniu, że dwa swobodne ciała opuściły punkt $\mathbf{r}_A$ z niezerową prędkością lokalną $\mathbf{v}_A$, a mijały punkt $\mathbf{r}_B$ z prędkością lokalną $\mathbf{v}_B$, wówczas otrzymany związek można byłoby przepisać w postaci:

$$\frac{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_A)}}{\sqrt{1 - v_A^2/c^2}} = \frac{\sqrt{g_{00}(\mathbf{r}_B)}}{\sqrt{1 - v_B^2/c^2}}. \quad (10.7)$$

Wynik ten oznacza, że podczas ruchu swobodnego cząstki o masie m obserwowanej przez nieinercyjnego obserwatora operującego statyczną metryką jest zachowana następująca wielkość:

$$E = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}(\mathbf{r})}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.8)$$

gdzie $\mathbf{r}$ wyznacza położenie cząstki, a $\mathbf{v}$ jest jej chwilową prędkością lokalną. Czynniki mc^2 w liczniku uzupełnia otrzymane wyrażenie w taki sposób, by dla $g_{00} = 1$ przechodziło ono w energię cząstki swobodnej znaną z układów inercjalnych. Widzimy zresztą, że w rozważanym wcześniej szczególnym przypadku układu nieinercyjnego przyspieszającej rakiety otrzymane wyrażenia na energię w ruchu swobodnym (9.36) i (10.8) również się pokrywają. Tak zdefiniowana energia nie jest natomiast zachowana w dynamicznej, czyli zależnej od czasu metryce. Z tego samego powodu siły zależne od czasu nie są w ogólności siłami potencjalnymi.

W prowadzonych dotąd rozważaniach zakładaliśmy, że w czasoprzestrzeni istnieje pewien układ inercjalny, który pozwala nam alternatywnie badać ruch. A co by się stało, gdyby z jakichś powodów istnienie takiego układu było niemożliwe? Na przykład w sytuacji, gdyby sama czasoprzestrzeń była zakrzywiona i nie dałoby się jej „wyprostować” poprzez zwykłą zamianę zmiennych? Wówczas pozostałoby nam założyć, że choć nie ma globalnego układu inercjalnego, to zapewne istnieje lokalny układ inercjalny opisujący każdy fragment zakrzywionej czasoprzestrzeni z osobna. Rozważenie takiej ewentualności w zagadnieniu skrócenia Lorentza, dylatacji czasu, czy stałej energii prowadzi lokalnie do identycznych wniosków i identycznych wyrażen, które otrzymaliśmy wcześniej, ponieważ od samego początku zagadnienia te formułowaliśmy lokalnie, dla infinitezymalnie krótkich odstępów czasu dt i odległości dL .

Nasze heurystyczne rozumowanie dotyczące zachowania energii w ruchu swobodnym możemy na koniec poprzeć argumentem bardziej zmatematyzowanym, przywdziewając białe rękawiczki. Powróćmy na moment do układu inercjalnego, w którym ruch odbywa się wzdłuż prostych. Jaką szczególną właściwość ma prosta, że wszystkie ciała wybierają ją jako tor swojego ruchu? Oczywiście, odcinek prostej łączący dwa punkty wyznacza najkrótszą możliwą drogę pomiędzy tymi punktami. Można by zatem posłużyć się *rachunkiem wariacyjnym* do wyznaczenia trajektorii ruchu swobodnego zakładając, że *lagrangian* jest po prostu odległością pomiędzy ustalonymi punktami wzdłuż rozważanej trajektorii. Wówczas zminimalizowany lagrangian określałby trajektorię rzeczywistą. Niestety jednak, taki lagrangian nie jest relatywistycznie niezmienniczy, czyli jego forma zależy od przyjętego układu odniesienia.

Spróbujmy zatem znaleźć inną charakterystyczną cechę ruchu swobodnego w układzie inercjalnym. W tym celu powróćmy do paradoksu bliźniąt omówionego w rozdziale 2.7. Ustaliliśmy wówczas, że bliźniak, który podróżował rakieta, zestarzał się mniej niż jego brat, który przez cały czas spoczywał. Dowodzi tego równanie (2.11). Możemy zatem odwrócić wniosek: bliźniak, który spoczywał, czyli w czasoprzestrzeni opisany był trajektorią swobodną, zestarzał się bardziej od swojego brata, który poruszał ruchem innym niż swobodny, niezależnie od tego po jakim torze leciała rakietka. Ten sam wniosek wyciągniemy porównując obydwie czasy z poruszającego się, inercjalnego układu odniesienia. Bliźniak poruszający się ruchem swobodnym zawsze zestarzeje się bardziej. Podsuwa to sugestię, by rozważyć zagadnienie wariacyjne maksymalnego czasu starzenia, które wyznaczyłoby rzeczywisty tor ruchu swobodnego. Tak się zresztą szczęśliwie składa, że w zagadnieniu

tym lagrangianem byłby czas własny, czyli niezmiennik relatywistyczny.

Zanim zbytnio się ucieszymy, zastanówmy się, czy wolno nam tak samo sformułować zagadnienie wariacyjne, gdy czasoprzestrzeń jest zakrzywiona i nie ma układu inercjalnego, w którym rzeczywisty ruch odbywałby się wzdłuż prostej. Na szczęście ruch swobodny można podzielić na wiele bardzo krótkich odcinków i dla każdego z nich znaleźć taki układ inercjalny, w którym metryka lokalnie staje się metryką Minkowskiego. Oznacza to, że na każdym z rozważanych odcinków spełniona będzie *zasada wariacyjna* z czasem własnym jako *lagrangianem*. Natomiast czas własny na całej drodze jest sumą czasów własnych na poszczególnych odcinkach, zatem uogólnienie zasady wariacyjnej jest jak najbardziej uzasadnione.

Oznacza to, że rzeczywisty ruch opisywany w układzie nieinercjalnym odpowiada trajektorii spełniającej następującą *zasadę najmniejszego działania*:

$$-mc \int ds = (\text{minimum}), \quad (10.9)$$

gdzie m jest masą spoczynkową rozważanego ciała, a stała na przedzie została dodana w taki sposób, by nadać fizyczny sens ewentualnym stałym ruchom. Widzimy zatem, że trajektoria swobodna jest jednoznacznie zadana przez metrykę, gdyż to ona jednoznacznie definiuje interwał równaniem (10.1).

Rozważmy omówiony wcześniej szczególny przypadek metryki statycznej, czyli niezależnej od współrzędnej czasowej x^0 oraz takiej, że $g_{0i} = 0$. Wówczas lagrangian $\mathcal{L}$ nie zależy od czasu, co prowadzi do istnienia całki pierwszej będącej stałą ruchu:

$$E = \dot{x}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \mathcal{L}, \quad (10.10)$$

gdzie $\dot{x}^i = c \frac{dx^i}{dx^0}$, a $\mathcal{L} = -mc^2 \frac{ds}{dx^0}$. Nietrudno sprawdzić, że całka ta prowadzi z powrotem do wyrażenia (10.8), określającego znaną nam już stałą ruchu – energię cząstki swobodnej. Wygląda na to, że wiemy już sporo o ruchach swobodnych w krzywej czasoprzestrzeni. Czy jednak na pewno dobrze je rozumiemy? Przed nami prosty test.

10.3 PARADOKS LEWITUJĄCEGO KAMIENIA

Rozważmy płaską czasoprzestrzeń Minkowskiego, ale opiszmy ją krzywoliniowym układem współrzędnych z zegarami umieszczonymi w każdym punkcie przestrzeni i dobranymi w

taki sposób, że im wyżej umieszczony jest zegar, tym szybciej kręcą się jego wskazówki ze względu na odpowiednio zmodyfikowany mechanizm. Niech upływ czasu na zegarach będzie dokładnie taki, jak przewiduje to metryka (10.2). Jeśli postać metryki jednoznacznie wyznacza ruch swobodny, to dlaczego kamień umieszczony na pewnej wysokości nie zaczyna w rozważanym układzie spadać? Przecież kamień spadałby w jednostajnie przyspieszonej rakiecie, której układ opisany jest tą samą metryką?

Rozwiązanie jest zaskakujące: w rozważanym układzie kamień będzie również spadał w dokładnie taki sam sposób, w jaki spadałby w rakiecie! Jak to możliwe? Ażeby odtworzyć metrykę (10.2) nie wystarczy odpowiednio dobrać zegarów na różnych wysokościach. Trzeba ponadto „przenumerować” współrzędne przestrzenne wszystkich zdarzeń w taki sposób, by nowe, krzywoliniowe zmienne wiązały się z „porządnymi” kartezjańskimi zmiennymi transformacją Rindlera (9.25). Oznacza to, że prosta linia świata kamienia, który w kartezjańskich zmiennych nazwalibyśmy spoczywającym, przecina kolejne zdarzenia, których współrzędna przestrzenna jest coraz mniejsza. Zatem „odległość” kamienia będzie się zmniejszać wraz z upływem czasu.

Przykład ten powinien nauczyć nas, że niezależnie od tego, czy istnieją fizyczne powody do takiego, a nie innego sposobu numerowania zdarzeń w czasoprzestrzeni, czy też przechodząc do nowych krzywoliniowych zmiennych kierujemy się ułańską fantazją – opis ruchu jest za każdym razem taki sam. Jest to zresztą piękna subtelność koncepcji Einsteina – by opisać ruch w sposób niezależny od przyjętego układu współrzędnych. Niezależnie czy układ jest inercjalny, czy też nie i czy zmienne są kartezjańskie, czy też krzywoliniowe. W szczególnej teorii względności do opisu ruchu „dobre” były jedynie inercjalne układy odniesienia, natomiast w *ogólnej teorii względności*, o którą zaczęliśmy się już ocierać, żaden układ współrzędnych nie jest wyróżniony.

10.4 ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI

Dawno już przekroczyliśmy granice stosowalności szczególnej teorii względności, która z założenia opisuje czasoprzestrzeń układów inercjalnych, pozbawionych wpływu pola grawitacyjnego. Uogólnienie jednak było tak naturalne, że trudno się było powstrzymać. Badając ruch ze zmienną prędkością stwierdziliśmy, że może on być opisany poprzez rozważenie nieskończonej rodziny układów inercjalnych chwilowo współporuszających się. Jest to, rzecz jasna, konsekwencją założenia, że sama obecność przyspieszenia nie zaburza biegu czasu,

czyli niezwykle ważnego postulatu zegara. Zresztą i bez dodatkowych modyfikacji otrzymane wnioski okazały się zaskakujące: zmienny upływ czasu, nieeuklidesowa przestrzeń, a nawet zadziwiające zjawisko horyzontu zdarzeń. Wszystko to wywnioskowaliśmy z elementarza szczególnej teorii względności.

Wiele wniosków otrzymanych poprzez analizę rzeczywistości widzianej oczami obserwatora przyspieszonego, a także dowolnego innego obserwatora nieinercyjnego przypominało konsekwencje działania pewnej pozornej siły, dla której udało nam się nawet wyznaczyć całkowitą energię (10.8). Okazało się, że z przyczyn fundamentalnych owa tajemnicza siła nie może być stała, lecz musi zmieniać się wraz z położeniem w określony sposób (czyli inaczej, niż na przykład siła elektryczna, która może być stała). Ze względu na to, że owa pozorna siła była konsekwencją określonego ruchu obserwatora i niczego więcej, moglibyśmy więc nazwać ją *siłą geometryczną*. Różne jej własności badał Einstein, który ostatecznie sformułował głęboką hipotezę, do której wspinał się zresztą wiele lat, znaną pod nazwą *zasady równoważności*. Zgodnie z nią istnieje w przyrodzie „prawdziwa” siła, której własności są nieodróżnialne od własności tejże siły geometrycznej związanej z przejściem do układu nieinercyjnego. Siłą tą jest *siła grawitacji*. Co prawda, najczęściej nie da się równoważnie opisać wpływu pola grawitacyjnego w całej czasoprzestrzeni jednym układem nieinercyjnym zastępującym grawitację, jednak otoczenie każdego punktu czasoprzestrzeni z osobna może być w ten sposób opisane. Zatem zasada równoważności ma charakter *lokalny*. Zasadę tę można również sformułować inaczej: w otoczeniu każdego zdarzenia w czasoprzestrzeni będącego w zasięgu sił grawitacji istnieje (swobodnie spadający) układ odniesienia, w którym rzeczywistość lokalnie jest dokładnie taka, jak gdyby pola grawitacyjnego nie było, a rozważany układ był inercyjny. Istnieje zresztą wiele alternatywnych sformułowań zasady równoważności.

10.5 MAKSYMALNA SIŁA RAŻENIA ZGNIŁEGO JAJKA

Przed nami kolejny test. Tym razem sprawdzimy, jak dobrze rozumiemy zasady ruchu w zakrzywionej czasoprzestrzeni. Kura, jak wiadomo, jest urządzeniem stworzonym przez jajo i służącym do produkcji innych jaj. Przypuśćmy, że chcielibyśmy rzucić w kogoś świeżo wyprodukowanym jajem. Kura, którą dysponujemy, staje się źródłem jajka w pewnej chwili i miejscu – zdarzenie A, a nasz cel znajduje się w innej chwili i miejscu – zdarzenie B. Jednak otrzymać cios świeżym jajkiem, to żadna ujmą, o wiele gorzej oberwać jajkiem

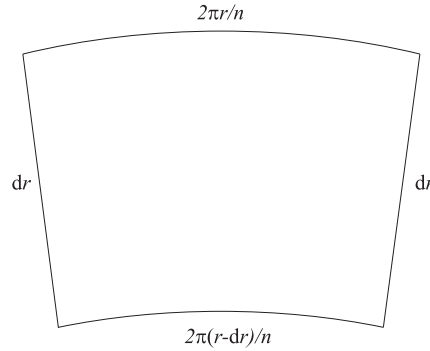
starym i zepsutym. Co zatem zrobić, żeby jajko w czasie lotu zepsuło się tak bardzo, jak to możliwe? Możemy na przykład wyposażyć jajko w niewielki silnik rakietowy, przy pomocy którego będziemy mogli pokierować ruchem jajka pomiędzy zdarzeniami A i B w taki sposób, ażeby jajko zestarzało się najbardziej. Jednak jak wyznaczyć optymalny tor ruchu? Odpowiedź wydaje się trudna, bo cała historia dzieje się na Ziemi i przy wyznaczaniu trajektorii spełniającej nasz warunek trzeba wziąć pod uwagę wpływ pola grawitacyjnego. Jak zatem pokierować rakieta uzbrojoną w groźną i z upływem czasu coraz groźniejszą broń biologiczną?

Z jednej strony chcemy, żeby jajko nie poruszało się zbyt szybko, bo wówczas dylatacja czasu opóźniłaby starzenie. Najlepiej więc, żeby jajo poruszało się po możliwie krótkiej drodze łączącej A i B, a taki ruch powinien odbywać się tuż przy powierzchni Ziemi. Z drugiej strony im wyżej podróżuje jajko, tym szybszy upływ czasu w polu grawitacyjnym – wiemy to z analizy przyspieszającej windy. Trzeba więc szukać kompromisu. Wydawać by się mogło, że zadanie jest szalenie skomplikowane i wymaga szczegółowej analizy. Okazuje się jednak, że jest wprost przeciwnie – problem jest banalny! Jak zatem należy sterować ruchem jajka? Otóż nie należy w ogóle nim sterować, wystarczy nadać jaju w chwili początkowej odpowiednią prędkość, a następnie wyłączyć silniki!

Aby się przekonać, że jest to strategia gwarantująca sukces, wystarczy zrozumieć sens zasady rządzącej ruchem swobodnym (10.9). Zgodnie z nią, spośród wszystkich możliwych trajektorii, trajektoria swobodna charakteryzuje się właśnie tym, że wzdłuż niej upływ czasu (czyli czas własny) jest maksymalny. Innymi słowy pole grawitacyjne samo wie, jak pokierować jajkiem, aby zmaksymalizować siłę rażenia. Wynik ten stawia w dość niezręcznej sytuacji Einsteina, który zwykł mawiać, że Natura jest wyrafinowana, ale nie złośliwa.

10.6 CZARNA DZIURA

Nasze dotychczasowe rozważania skupiały się na badaniu właściwości czasoprzestrzeni zadaną metryką. Udało nam się wyznaczyć ją w szczególnym przypadku układu jednostajnie przyspieszonego, wiemy też, jak postępować, by wyznaczyć metrykę w dowolnym innym układzie krzywoliniowym. Wciąż jednak nie znamy ogólnej metody wyznaczania metryki, kiedy czasoprzestrzeń jest w zasięgu siły grawitacji. Jest to zagadnienie szalenie ciekawe, a jego rozwiązanie prowadzi do słynnych *równań Einsteina* na metrykę pola grawitacyjnego. Niestety, omówienie tego zagadnienia w pełnej ogólności przekroczyłoby ramy niniejszego

Rysunek 10.1: Kształt jednej z n identycznych klatek.

wykładu. Na otarcie łez chcielibyśmy jednak przedstawić pewną trickową metodę pochodzącą od Andrzeja Szymachy, pozwalającą odgadnąć postać metryki czasoprzestrzeni w jednym szczególnym, lecz z fizycznego punktu widzenia, niezwykle ważnym przypadku. Kto jeszcze nie domyśla się jaki to przypadek, niech ponownie przeczyta tytuł niniejszego rozdziału.

Jak wiadomo, Ziemia to kula u nogi. Trzyma nas przy niej wytwarzane przez tę kulę pole grawitacyjne. Toteż i metryka odpowiadająca takiemu polu powinna być sferycznie symetryczna, a jej elementy niezależne od współrzędnej czasowej. Wyznamy zatem metrykę czasoprzestrzeni zaburzanej przez pewną statyczną, sferycznie symetryczną masę M . Wygodnie nam będzie wprowadzić układ sferyczny, w którym metryka przybiera ogólną postać:

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (10.11)$$

przy czym w granicy $r \rightarrow \infty$ czasoprzestrzeń staje się euklidesowa i funkcje metryczne $g_{00}(\infty) = 1$ i $g_{rr}(\infty) = -1$. Współrzędna r została zdefiniowana w taki sposób, by równa była obwodowi odpowiadającego jej okręgu (o środku w początku układu), podzielonemu przez 2π (lub równoważnie, by jej kwadrat równy był polu powierzchni sfery podzielonemu przez 4π). Zatem dr nie określa rzeczywistej odległości od centrum. Lokalną składową radialną odległości określa element $\sqrt{-g_{rr}(r)}dr$. W dalszym wyprowadzeniu interesować nas będzie metryka na zewnątrz zniekształcającej ją masy.

Ażeby powiedzieć coś o elementach takiej metryki prześledźmy następujący eksperyment myślowy. Rozważmy układ inercjalny bez pola grawitacyjnego, w którym znajduje

się n jednakowych klatek o kształcie zbliżonym do trapezu, którego górna krawędź jest wycinkiem okręgu o promieniu r i długości $\frac{2\pi r}{n}$, a dolna wycinkiem okręgu o promieniu $r - dr$ i długości $\frac{2\pi(r-dr)}{n}$, zaś boczne, symetryczne krawędzie są odcinkami o długości dr , jak na rysunku 10.1. Rozmieścimy n klatek równomiernie na obwodzie okręgu o promieniu dużo większym niż r w taki sposób, żeby środki górnych i dolnych krawędzi leżały na tym samym promieniu tego okręgu. Następnie nadajmy każdej z klatek, jednocześnie w rozważanym układzie, bardzo niewielką prędkość skierowaną radialnie do środka okręgu. Niech prędkości te będą tak małe, że można zaniedbać skrócenie Lorentza. Po odpowiednio długim czasie, gdy wszystkie klatki zderzą się (co nastąpi jednocześnie), zapełnią one szczelnie pierścień o promieniu r i grubości dr . Ponadto, w inercjalnym układzie obserwatora znajdującego się wewnątrz jednej z klatek, w momencie zderzenia obie boczne ścianki zetkną się jednocześnie i w całości z bocznymi ściankami sąsiednich klatek.

Przypuśćmy teraz, że identyczny eksperyment z użyciem n klatek wykonamy w polu centralnym opisanym metryką (10.11) rozmieszczając klatki równomiernie na okręgu o środku w punkcie $r = 0$ i nieskończonym promieniu i nadając im ponownie zaniedbywalnie małą prędkość w kierunku środka okręgu. Na mocy zasady równoważności dalszy przebieg wydarzeń z punktu widzenia obserwatora znajdującego się wewnątrz klatki powinien być nieodróżnialny od poprzedniego eksperymentu, w którym pole grawitacyjne nie występowało. Zatem ponownie boczne krawędzie klatki o wysokości dr spotkają się jednocześnie z krawędziami sąsiednich klatek. Zwróćmy jednak uwagę, że do zderzenia dojdzie w skończonej odległości r od środka centralnej masy, gdzie przestrzeń jest zakrzywiona i prawdziwa grubość pierścienia o zewnętrznym obwodzie $2\pi r$, a wewnętrznym obwodzie $2\pi(r - dr)$ wynosi nie dr , lecz $\sqrt{-g_{rr}(r)}dr$. Co zatem sprawia, że klatki mimo wszystko zderzą się jak należy, zapełniając cały pierścień? Czynnikiem, który o tym przesądza musi być skrócenie Lorentza związane z prędkością spadających klatek. Przypomnijmy, że w układzie inercjalnym przez cały czas klatki poruszały się z zaniedbywalną prędkością, podczas gdy teraz ich prędkość istotnie się zwiększyła. Zatem w układzie spadającej klatki grubość pierścienia, do którego klatka ma się dopasować zmniejsza się w związku ze skróceniem Lorentza. Musi więc zachodzić związek:

$$dr = \sqrt{1 - \frac{v_\infty^2(r)}{c^2}} \sqrt{-g_{rr}(r)} dr, \quad (10.12)$$

gdzie $v_\infty(r)$ jest prędkością ciała przybywającego z nieskończenie daleka do punktu o współ-

rzędnej radialnej r . Powyższy związek musi zachodzić, jeśli spadek swobodny ma być nieodróżnialny od ruchu ze stałą prędkością w układzie inercyjnym, czyli ma być spełniona zasada równoważności.

Kolejnym równaniem, z którego skorzystamy, jest zasada zachowania energii (10.8) w spadku swobodnym. Przy założeniu, że nieskończenie daleko od środka masy prędkość klatek była zaniedbywalna, a czasoprzestrzeń płaska, czyli $g_{00}(\infty) = 1$, z zasady zachowania energii otrzymamy związek:

$$1 = \frac{\sqrt{g_{00}(r)}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\infty}^2(r)}{c^2}}}. \quad (10.13)$$

Porównanie dwóch powyższych równań prowadzi do pierwszego ważnego wniosku na temat metryki (10.11), mianowicie:

$$g_{00}(r)g_{rr}(r) = -1. \quad (10.14)$$

Oznacza to, że do wyznaczenia jest tylko jedna nieznana funkcja. Jak tego dokonać? Mamy już nieco doświadczenia z układem jednostajnie przyspieszonym i moglibyśmy sobie wyobrazić, że sferycznie symetryczne, statyczne pole grawitacyjne powinno być równoważne nieskończonemu zbiorowi rakiet, z których każda porusza się ruchem przyspieszonym radialnie na zewnątrz środka symetrii. Moglibyśmy, być może, się spodziewać, że poprzez analogię z metryką (10.2) $g_{00} = \frac{g^2(r_0)r^2}{c^4}$, a $g_{rr}(r) = -1$, gdzie $\mathbf{g}(r) = -\frac{c^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$ odpowiadałoby przyspieszeniu grawitacyjnemu, czyli przyspieszeniu lokalnej rakiety wziętemu z przeciwnym znakiem.

Sami chyba jednak nie wierzymy w wynik, zgodnie z którym przyspieszenie grawitacyjne nie przechodzi w żadnej granicy w przybliżony, newtonowski wzór, a ponadto otrzymana metryka jest sprzeczna z równaniem (10.14). Nasza logika jest tu bowiem nieco zezowata. Równie naiwna byłaby analogiczna hipoteza w przypadku elektrostatycznym. Pole elektryczne pochodzące od nieskończonej płyty równomiernie naładowanej ładunkiem nie zależy od odległości od płyty, ale nie oznacza to przecież, że pole elektryczne wytwarzane przez ładunek punktowy ma być radialne i również niezależne od odległości od niego. Zbyt dosłowne korzystanie z tego, co wiemy o zegarach w układzie przyspieszonym stanowi zatem marną metodę. Być może jednak na właściwy trop naprowadzi nas analogia z rozumowaniem prowadzącym w elektrostatyce do prawidłowego wyniku. Kluczowym

pojęciem, którego używa się do wyprowadzenia wzoru na pole wytwarzane przez ładunek punktowy jest *strumień pola*. Jak wiadomo, w elektrostatyce strumień pola przez zamkniętą powierzchnię, wewnątrz której nie ma ładunku, znika. Znajomość tego faktu wystarcza do wyznaczenia, z dokładnością do stałej, pola wytwarzanego przez ładunek punktowy. W przypadku grawitacyjnym analogią pola elektrycznego proporcjonalnego do przyspieszenia ładunku próbnego jest *pole przyspieszeń* $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ doznawanych początkowo przez cząstki próbne „upuszczane” swobodnie z różnych położeń $\mathbf{r}$. Zbadajmy więc strumień pola przyspieszeń przez zamkniętą powierzchnię w znanym nam przypadku nieinercjalnego obserwatora jednostajnie przyspieszonego. Korzystając ze wzoru (9.24) mamy:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{c^2}{x}\hat{\mathbf{x}}, \quad (10.15)$$

gdzie ujemny znak informuje, że przyspieszenie spadającej w rakiecie cząstki swobodnej skierowane jest przeciwnie do przyspieszenia rakiety. Biorąc gradient obu stron równania dostajemy:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{c^2}{x^2} = \frac{g^2(\mathbf{r})}{c^2} \neq 0. \quad (10.16)$$

Jest to bardzo ciekawy wynik. Pokazuje on, że strumień pola nie znika jak w elektrostatyce, a zatem pole przyspieszeń musi być *nieliniowe**. Wynik ten jest także czytelną sugestią, że równania pola Einsteina wyznaczające metrykę powinny być także równaniami nieliniowymi. To zaś niemal zawsze oznacza poważne trudności matematyczne w ich rozwiązywaniu.

Póki co, nie jest to jednak nasz problem. Naszym problemem jest wyznaczenie nieznanej funkcji $g_{00}(r)$. Wzór (10.16) to jedyny punkt zaczepienia, którym dysponujemy, więc w dalszej części przyjmijmy hipotezę, że prawo (10.16) obowiązuje również w przypadku trójwymiarowym (tak właśnie jest w elektrostatyce, a nawet elektrodynamice). Rozważmy sferę o „promieniu” r i grubości $\sqrt{-g_{rr}(r)}dr$. Strumień pola przyspieszeń $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}$ przez rozważany element objętości wynosi:

*Oznacza to, że jeśli równanie (10.16) jest spełnione dla pewnego pola przyspieszeń $\mathbf{g}_1(\mathbf{r})$ oraz dla innego pola przyspieszeń $\mathbf{g}_2(\mathbf{r})$, to nie będzie ono spełnione dla pola przyspieszeń będącego sumą $\mathbf{g}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{r})$. Mówiąc najprościej: suma nieliniowych pól nie jest poprawnym polem.

$$-g(r)4\pi r^2 + g(r+dr)4\pi(r+dr)^2 = \frac{g^2(r)}{c^2}4\pi r^2 \sqrt{-g_{rr}(r)}dr, \quad (10.17)$$

co po skorzystaniu z (10.14) prowadzi do równania:

$$\frac{\sqrt{g_{00}(r)} d(g(r)r^2)}{g(r)r^2} = \frac{g(r)}{c^2}. \quad (10.18)$$

Jest to nasze drugie ważne równanie, ale wprowadza ono do rozważań kolejną funkcję $g(r)$. Zatem do rozwiązania interesującego nas zagadnienia nadal potrzebujemy jeszcze jednego niezależnego równania, wiążącego funkcje $g_{00}(r)$ i $g(r)$. Jest chęć, znajdzie się sposób.

Rozważmy spadek swobodny ciała o masie m z punktu o współrzędnej radialnej r o niewielką wartość współrzędnej dr . W swobodnym spadku zachowana jest energia (10.8), zatem mamy:

$$mc^2 \sqrt{g_{00}(r)} = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}(r-dr)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (10.19)$$

Po elementarnych przekształceniach dostajemy stąd:

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{g_{00}(r-dr)}{g_{00}(r)} \right) = c^2 \frac{dg_{00}(r)}{dr} \frac{1}{g_{00}(r) \sqrt{-g_{rr}(r)}} dl = 2c^2 \frac{d\sqrt{g_{00}(r)}}{dr} dl, \quad (10.20)$$

gdzie $dl = \sqrt{-g_{rr}(r)}dr$ jest rzeczywistą, lokalną drogą przebytą przez spadające ciało. Ponieważ spadek trwał nieskończenie krótko, możemy stosować ściśle wzory nierelatywistyczne, zgodnie z którymi $v^2 = -2gdl$. Prowadzi to do równania:

$$\frac{g(r)}{c^2} = -\frac{d\sqrt{g_{00}(r)}}{dr}, \quad (10.21)$$

które kończy nasze poszukiwania. Mamy komplet równań, teraz wystarczy je tylko rozwiązać. Jest to zadanie bardzo łatwe. Porównując stronami równanie (10.18) z (10.21) dostajemy:

$$0 = \frac{1}{g(r)r^2} \frac{d\left(\sqrt{g_{00}(r)}g(r)r^2\right)}{dr}. \quad (10.22)$$

Uczni obliczają, że rozwiązaniem tego równania jest stała funkcja spod pochodnej:

$$\sqrt{g_{00}(r)}g(r)r^2 = C. \quad (10.23)$$

Korzystając ponownie z (10.21) dostajemy równanie wyłącznie na $g_{00}(r)$:

$$\frac{dg_{00}(r)}{dr} = -\frac{2C}{c^2 r^2}, \quad (10.24)$$

k którego rozwiązaniem z warunkiem brzegowym $g_{00}(\infty)$ i w wynikającymi z niego pozostałymi szukanymi funkcjami są:

$$\begin{aligned} g_{00}(r) &= 1 + \frac{2C}{c^2 r} \\ g_{rr}(r) &= -\frac{1}{1 + 2C/c^2 r} \\ g(r) &= \frac{C}{r^2 \sqrt{1 + 2C/c^2 r}}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Pozostaje już tylko do wyznaczenia stała C . Można to zrobić w oparciu o znane, newtonowskie pole przyspieszeń w granicy nierelatywistycznej: $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$, gdzie G jest *stałą grawitacji Newtona*. Daje nam to $C = -GM$, zatem ostatecznie metryka, zwana *metryką Schwarzschilda* przyjmuje postać:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10.26)$$

a wynikające z niej przyspieszenie swobodnej cząstki próbnej w położeniu o współrzędnej r :

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - 2GM/c^2 r}}. \quad (10.27)$$

Wyznaczona metryka (10.26) zachowuje się niepokojąco dla $r = \frac{2GM}{c^2} \equiv R$ oraz $r = 0$. Tak długo, jak rozważana masa rozciąga się częściowo w obszarze $r > R$, nie musimy

się tym martwić, gdyż metrykę wyznaczyliśmy w przestrzeni na zewnątrz masy. Możemy jednak rozważać masę znajdującą się całkowicie wewnątrz sfery o „promieniu” R zwanym *promieniem Schwarzschilda*, a wówczas zaczną dziać się ciekawe rzeczy. Przede wszystkim zauważmy, że *prędkość ucieczki* v_∞ dla $r \rightarrow R$ dąży do prędkości światła, co oznacza, że nic, co znajduje się poniżej promienia Schwarzschilda nie będzie w stanie stamtąd się wydostać, a wręcz zostanie w krótkim czasie wessane do punktu centralnego $r = 0$ zwanego *osobliwością*. Zatem jedyny statyczny rozkład masy zawartej wewnątrz tego obszaru to masa punktowa umieszczona w osobliwości. Taką punktową masę i wytwarzane przez nią pole grawitacyjne nazywa się *czarną dziurą*.

Zbadajmy obszar czasoprzestrzeni wokół czarnej dziury, w okolicy promienia Schwarzschilda $r \approx R$. Wprowadźmy nową zmienną $\Delta r = r - R$, w której metryka przyjmuje postać:

$$ds^2 = \frac{\Delta r}{\Delta r + R} c^2 dt^2 - \frac{\Delta r + R}{\Delta r} d\Delta r^2 - (\Delta r + R)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (10.28)$$

W bezpośrednim sąsiedztwie $r \approx R$ możemy przyjąć, że $\Delta r \ll R$, ponadto zauważmy, że współrzędna Δr nie odmierza rzeczywistej odległości, gdyż r zdefiniowane było jako obwód okręgu podzielony przez 2π . Rzeczywista, infinitezymalna odległość określona jest wyrażeniem $dx = \sqrt{-g_{rr}(r)} dr \approx \sqrt{\frac{R}{\Delta r}} d\Delta r = 2d\sqrt{R\Delta r}$. Ponadto, zamieniając pozostałe zmienne przestrzenne zgodnie z podstawieniem: $R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \equiv dy^2 + dz^2$ otrzymujemy nową postać metryki Schwarzschilda w okolicy $r \approx R$:

$$ds^2 = \frac{x^2}{4R^2} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (10.29)$$

I oto stała się rzecz wspaniała, otrzymaliśmy metrykę obserwatora jednostajnie przyspieszonego (10.2), o którym wiemy już całkiem sporo! W nowych zmiennych, opisujących lokalnie rzeczywiste odległości okazuje się, że promień Schwarzschilda definiuje powierzchnię horyzontu zdarzeń wokół czarnej dziury i, jak wcześniej napisaliśmy, nic, nawet światło, nie może wydostać się zza niego, gdy raz znalazło się wewnątrz. Lepiej co prawda widzieć napis „wstęp wzbroniony”, niż „wyjścia nie ma”, niestety mamy tu jednak do czynienia z sytuacją zgoła przeciwną. Region w pobliżu horyzontu zdarzeń może być, na mocy zasady równoważności, opisany przez układ jednostajnie przyspieszony charakteryzowany

zegarem poruszającym się z przyspieszeniem $a = \frac{c^2}{2R}$. Zatem absolutnie wszystko, czego dowiedzieliśmy się w rozdziale 9 na temat rzeczywistości widzianej przez tego nieinercjalnego obserwatora stosuje się do opisu okolic horyzontu czarnej dziury.

10.7 POŻARCIE PRZEZ CZARNĄ DZIURĘ

Wokół zagadnienia czarnych dziur narosło mnóstwo mitów. Jednym z najczęstszych nieporozumień jest twierdzenie, jakoby obiekty pożerane przez czarną dziurę, czy też mówiąc precyzyjniej, wpadające za horyzont zdarzeń, przepadały ostatecznie z dostępnego nam świata grzebiąc wraz z sobą pewną część entropii (lub informacji). Niektórych nawet skłania to do podejrzeń, że istnienie czarnych dziur wprowadza mechanizm łamania *II zasady termodynamiki*. Otóż nic bardziej mylnego. Wiemy bowiem doskonale z rozdziału 9, że w naszym zewnętrznym układzie odniesienia żadne swobodnie (ani nieswobodnie) spadające ciało nigdy nie osiągnie horyzontu zdarzeń. Powiedzmy głośno i wyraźnie: z naszego punktu widzenia jeszcze nigdy nic nie wpadło do żadnej czarnej dziury! A zatem nigdy nie przepadła w ten sposób żadna informacja czy entropia.

No dobrze, a jak wygląda sytuacja z punktu widzenia spadającego obiektu? Jeśli jego rozmiary są dużo mniejsze od promienia Schwarzschilda, to minięcie horyzontu zdarzeń będzie dla tego obiektu wręcz niedostrzeżone. Nie wydarzy się w chwili mijania absolutnie nic szczególnego (z podobną sytuacją mamy do czynienia mijając samochodem granicę belgijsko-holenderską; jedynie złośliwi znają sposób, którego tu nie wyjawię, na stwierdzenie, czy wciąż jesteśmy w Belgii, czy może już w Holandii). Przypomnijmy zaś, że z punktu widzenia obserwatora mijającego horyzont, świat zewnętrzny jest wciąż widoczny, zatem i z jego punktu widzenia żadna informacja czy entropia nie przepada bez wieści.

Spadający pod horyzont obserwator musi się natomiast liczyć z kłopotami, jeśli jego rozmiary nie są dużo mniejsze od promienia Schwarzschilda. Wówczas bowiem pojawiają się wzrastające siły pływowe rozrywające spadające obiekty wzdłuż składowej radialnej i ściskające je wzdłuż składowej poprzecznej. Naprawdę ciekawe rzeczy mogą się wydarzyć pod horyzontem zdarzeń, pod którym, w samym środku, w $r = 0$, znajduje się osobliwość, do której ostatecznie musi trafić wszystko, co dotarło pod horyzont. Jednak ten fascynujący temat pozostawimy już na całkiem inną okazję.

W jaki sposób obliczyć czas własny, po którym swobodnie spadający obserwator dotrze do osobliwości? Musimy rzecz jasna skorzystać ze świeżo wyprowadzonej metryki (10.26).

W najprostszym możliwym przypadku, gdy ruch jest czysto radialny, możemy przyjąć $d\theta = d\phi = 0$, a wówczas metryka Schwarzschilda upraszcza się do postaci:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r} dr^2. \quad (10.30)$$

Z definicji prędkości lokalnej (10.5) wynika związek:

$$g_{00}(r)dt^2 = -\frac{g_{rr}(r)}{v^2}dr^2, \quad (10.31)$$

który po wstawieniu do wyrażenia na metrykę (10.30) daje:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r} \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right) dr^2. \quad (10.32)$$

Rozważany ruch odbywa się w statycznym polu grawitacyjnym, obowiązuje w nim zatem zasada zachowania energii (10.8). Po skorzystaniu z wyrażenia na współczynnik $g_{00}(r)$ dla metryki Schwarzschilda możemy z zasady zachowania energii otrzymać związek pomiędzy prędkością lokalną v , a radialną współrzędną r . Przy założeniu, że ruch rozpoczął się z położenia r_0 bez prędkości początkowej dostajemy po elementarnych przekształceniach związek:

$$\frac{c^2}{v^2} - 1 = \frac{1 - 2GM/c^2 r}{2GM/c^2 r - 2GM/c^2 r_0}, \quad (10.33)$$

dzięki któremu możemy pozbyć się z wyrażenia (10.32) zależności od prędkości:

$$ds^2 = \frac{c^2 dr^2}{2GM(1/r - 1/r_0)}. \quad (10.34)$$

Powyższe równanie należy teraz wyciąkować w granicach od r_0 do 0, a całkowanie to najłatwiej wykonać przyjmując następującą parametryzację współrzędnej radialnej: $r(\eta) = \frac{r_0}{2}(1 + \cos \eta)$, dla której otrzymujemy:

$$ds = \sqrt{\frac{r_0^3 c^2}{8GM}} (1 + \cos \eta) d\eta. \quad (10.35)$$

Całkowanie powyższego równania jest już całkiem banalne. Otrzymujemy z niego wynik określający całkowity czas $\tau = \frac{s}{c}$ podróży z położenia $r = r_0$ do osobliwości:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}. \quad (10.36)$$

Zgodnie z naszymi zapewnieniami czas ten jest skończony. Podobnie jak niniejszy rozdział.

Pytania

- Jaka jest różnica pomiędzy metryką trójwymiarowej przestrzeni i czterowymiarowej czasoprzestrzeni?
- Czy zawsze można wprowadzić taki układ współrzędnych, w którym metryka zakrzywionej czasoprzestrzeni staje się metryką Minkowskiego?
- Czym różni się czasoprzestrzeń nieinercyjnego obserwatora jednostajnie przyspieszonego od czasoprzestrzeni obserwatora „inercyjnego”, ale posługującego się zmiennymi krzywoliniowymi, które tak numerują czasoprzestrzeń, że odpowiadające im przekształcenie krzywoliniowe odtwarza transformację Rindlera?
- Czy w ruchu swobodnym energia zachowana jest dla dowolnie zakrzywionej czasoprzestrzeni? Jeśli są jakieś ograniczenia zasady zachowania energii, to jaka jest ich fizyczna przyczyna?
- Dlaczego tor ruchu swobodnego w zakrzywionej czasoprzestrzeni jest rozwiązaniem zagadnienia wariacyjnego?
- Czym różni się horyzont zdarzeń czarnej dziury od horyzontu zdarzeń obserwatora jednostajnie przyspieszonego?
- Co dzieje się z informacją traconą, gdy ciało wpada pod horyzont zdarzeń?
- Z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego, żaden obiekt nie dostanie się w skończonym czasie pod horyzont zdarzeń. Czy zatem możliwe jest, żeby w skończonym czasie z zapadającej się gwiazdy powstała czarna dziura?
- Co stałoby się z trajektorią Ziemi, gdyby Słońce nagle zamieniło się w czarną dziurę?

Zadania

- Rozwiązania zadań do poprzedniego rozdziału pokazują, że światło nie nadaje się do badania skończonych odległości metodą radarową, gdyż jego prędkość współrzędnościowa nie jest stała. Możemy jednak zastosować metodę radarową do badania infinitesimalnych odległości, gdyż w bezpośrednim otoczeniu punktu, w którym znajduje się zegar, prędkość światła mierzona jego czasem wynosi c . Wykorzystaj metodę radarową do wyznaczenia odległości pomiędzy nieskończenie bliskimi zdarzeniami dla metryki, której elementy $g_{0i} \neq 0$.
- Sformułuj zasadę wariacyjną dla promienia światła w zakrzywionej czasoprzestrzeni.
- Oblicz (rzeczywiste) pole powierzchni horyzontu zdarzeń czarnej dziury.
- Ile wynosi promień Schwarzschilda czarnej dziury o masie Ziemi? Jaki błąd popełniamy zakładając, że stosunek obwodu równika do średnicy Ziemi równa się π ?
- Udowodnij, że czas spadku na horyzont czarnej dziury mierzony przez obserwatora posługującego się czasem t z metryki (10.30) jest nieskończony.

Rozdział 11

ELEKTRODYNAMIKA[★]

Zakończyliśmy poznawanie doktryn mechaniki relatywistycznej, pora na elektromagnetyzm. Nie będziemy jednak zajmować się tworzeniem wersji relatywistycznej równań Maxwella, a to dlatego, że są one już relatywistyczne, choć są starsze od samej teorii względności. Materiał przedstawiony w niniejszym rozdziale uświadomi nam, że pojęcie „elektrodynamiki relatywistycznej” powinno spaść w dół razem z masłem maślanym. Mimo błogiej nieświadomości samego Maxwella.

11.1 PRELUDIUM

W *równaniach Maxwella* występują dwie stałe, które można wyznaczyć eksperymentalnie: stała dielektryczna ε_0 oraz przenikalność magnetyczna próżni μ_0 :

[★]Niniejszy rozdział przeznaczony jest dla osób, które miały wcześniej styczność z równaniami Maxwella i opanowały instrukcję obsługi wektorowego operatora różniczkowego ∇ używanego do opisu wielkości takich jak dywergencja, rotacja, tudzież gradient, przy pomocy których sformułowane są równania elektrodynamiki. Pozostałych, którym symbol ∇ kojarzy się raczej z pomieszczeniem dla dżentelmenów pozdrawiamy i zapraszamy wkrótce.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{11.1}$$

Okazuje się, że iloczyn tych dwóch stałych ma wymiar $[\frac{s^2}{m^2}]$, czyli odwrotności kwadratu prędkości. Możemy zatem wprowadzić nową stałą o wymiarze prędkości, z definicji równą $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ i wyznaczyć jej wartość eksperymentalnie na podstawie wyników pomiarów siły przyciągania dwóch ładunków elektrycznych, a następnie siły oddziaływania dwóch przewodów z prądem otrzymując $c \approx 3 \cdot 10^8 [\frac{m}{s}]$. Jest to właśnie prędkość światła, czyli prędkość propagacji próżniowych rozwiązań równań Maxwella. I nie chodzi tu wyłącznie o fale elektromagnetyczne. Bowiem zmiany potencjału elektrostatycznego φ wywołane chociażby zmienną w czasie gęstością wytwarzających go ładunków propagują się również z prędkością c . By sobie to uświadomić wystarczy kilka prostych przekształceń równań (11.1). Szczegóły w głębi rozdziału. W wyniku otrzymamy:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0. \tag{11.2}$$

Jest to ni mniej, ni więcej, a zwykłe równanie falowe, którego rozwiązania rozchodzą się, jak wiadomo, z prędkością $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. I już zaczyna pachnieć teorią względności.

11.2 POTENCJAŁ PORUSZAJĄCEGO SIĘ ŁADUNKU

Rekonesans relatywistycznych własności elektrodynamiki klasycznej rozpoczniemy od zbadania ciekawego przykładu. Spróbujmy wyznaczyć potencjał elektrostatyczny pochodzący od poruszającego się ładunku punktowego. Sprawa niby prosta. Zaraz jednak okaże się, jak łatwo się pomylić.

Zacznijmy od wypisania ogólnego wyrażenia na potencjał elektrostatyczny w punkcie $\mathbf{r}_B$ i chwili t pochodzący od dowolnego rozkładu ładunku elektrycznego $\varrho(\mathbf{r}, t)$ (dopuszczamy możliwość zależności rozkładu ładunku od czasu):

$$\varphi(\mathbf{r}_B, t) = \int d^3r_A \frac{\varrho(\mathbf{r}_A, t)}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (11.3)$$

gdzie $r = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$. Oczywiście wzór ten jest niepoprawny, bo potencjał elektryczny w danej chwili t nie może zależeć od rozkładu ładunków w tej samej chwili! Potencjał φ nie może „dowiadzać się” natychmiast o aktualnym rozkładzie ładunków, a wyłącznie o rozkładzie w chwilach wcześniejszych (w przeciwnym razie można by używać pomiarów potencjału φ do błyskawicznego przekazywania informacji). Ponieważ jednak nie chcemy na razie odwoływać się do naszej znajomości teorii względności, a jedynie opierać się na prawach elektromagnetyzmu, posłużmy się wnioskiem z poprzedniego podrozdziału: zaburzenia potencjału propagują się z prędkością c . Zatem poprawny wzór ma postać:

$$\varphi(\mathbf{r}_B, t) = \int d^3r_A \frac{\varrho(\mathbf{r}_A, t_{\text{ret}})}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (11.4)$$

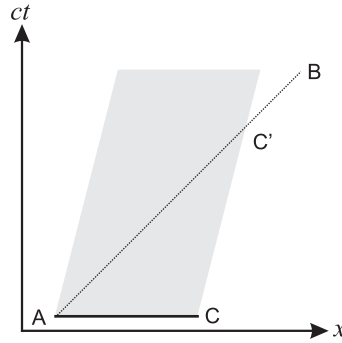
gdzie $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ jest tak zwanym *czasem retardowanym* (opóźnionym), co oznacza, że potencjał „czuje” jedynie rozkład ładunków w chwilach wcześniejszych. W ten sposób uzyskujemy gwarancję, że zmiany potencjału propagują się zawsze z prędkością c , dokładnie jak fale elektromagnetyczne, czyli po prostu światło.

Spróbujmy więc odpowiedzieć na interesujące nas pytanie: jaki jest potencjał generowany przez punktowy ładunek q poruszający się z prędkością $\mathbf{v}$? Oczywiście, naturalnym rozwiązaniem wydaje się być:

$$\varphi(\mathbf{r}_B, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{ret}}}, \quad (11.5)$$

gdzie r_{ret} jest odległością między położeniem ładunku w odpowiednio wcześniejszej, retardowanej chwili a punktem w którym badamy pole w chwili obecnej. Okazuje się, że po raz kolejny jesteśmy w błędzie. No cóż, mylić się jest rzeczą ludzką, głupota to także jakiś sposób korzystania z mózgu. Poprawny wynik jest nieco bardziej skomplikowany:

$$\varphi(\mathbf{r}_B, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{ret}}} \frac{1}{(1 - v_r/c)_{\text{ret}}}, \quad (11.6)$$



Rysunek 11.1: Diagram czasoprzestrzenny naładowanego odcinka AC. Szukamy potencjału w punkcie B.

czyli pojawia się dodatkowo wyraz ze składową prędkości w kierunku punktu w którym badamy pole, obliczony w chwili retardowanej.

Skąd bierze się dodatkowy człon? Najłatwiej to zrozumieć rozważając przykład odcinka AC naładowanego równomiernie ładunkiem q i poruszającego się wzdłuż prostej, na której leży. Spróbujmy znaleźć potencjał na tej prostej, w punkcie B . Odpowiedni diagram czasoprzestrzenny przedstawiony jest na rysunku 11.1. Szary obszar reprezentuje fragment czasoprzestrzeni zajmowany przez poruszający się, naładowany odcinek. Do punktu B dociera informacja o rozkładzie ładunku, której linia świata została zaznaczona na diagramie przerywaną linią. Oznacza to, że do punktu B dociera informacja o ładunkach znajdujących się na przecięciu przerywanej linii świata oraz szarego obszaru. Widać, że pozorna długość naładowanego odcinka nie jest równa $|AC|$, tylko $|AC'|$. Zatem potencjał w punkcie B jest taki, jak gdyby był generowany przez ładunek, którego wartość nie jest równa q , tylko $q \frac{|AC'|}{|AC|}$. Oznacza to, że musimy odpowiednio zmodyfikować wyrażenie na potencjał pochodzący od naładowanego odcinka. Ponieważ $|AC| = |AC'|(1 - v/c)$, gdzie v jest prędkością odcinka, to we wszystkich wyrażeniach zamiast q należy wstawiać $\frac{q}{1-v/c}$. Naszą analizę nietrudno uogólnić na przypadek trójwymiarowy. Wówczas należy tylko zastąpić prędkość v jej rzutem v_r na kierunek, w którym szukamy potencjału. Ot, i cała filozofia.

W wyniku dokonywanych przekształceń wyszło na jaw, że rezultat nie zależy od długości odcinka $|AC|$, więc nasze wzory powinny być poprawne również, gdy odcinek jest nieskończenie krótki, czyli gdy ładunek jest punktowy. W ten sposób docieramy szczęśliwie do poprawnego wyrażenia (11.6) na potencjał generowany przez ładunek poruszający się z dowolną prędkością. Wystarczy tylko, znając równanie ruchu ładunku, znaleźć odpowiednie prędkości i położenia retardowane. Wynik nasz możemy jeszcze przepisać w

równoważnej, eleganckiej postaci:

$$\varphi(\mathbf{r}_B, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)_{\text{ret}}}. \quad (11.7)$$

W identyczny sposób, korzystając z zależności potencjału wektorowego $\mathbf{A}$ od rozkładu prądów elektrycznych, możemy wyznaczyć:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_B, t) = \frac{q\mathbf{v}_{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)_{\text{ret}}}. \quad (11.8)$$

Otrzymane równania nazwane zostały nazwiskami swoich odkrywców. Są to *potencjały Liénarda-Wiecherta*. Ostatnią rzeczą, którą teraz uczynimy, będzie znalezienie tych potencjałów dla najprostszego możliwego przypadku: ruchu ładunku q ze stałą prędkością v wzdłuż osi x .

W przypadku jednostajnego ruchu możemy bez trudu obliczyć retardowane czynniki występujące w potencjałach Liénarda-Wiecherta. Po pierwsze, retardowana odległość pomiędzy poruszającym się ładunkiem a punktem, w którym badamy potencjał r_{ret} , wiąże się z czasem retardowanym t_{ret} , w którym ładunek znajdował się właśnie w punkcie r_{ret} , zależnością:

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{r_{\text{ret}}}{c}. \quad (11.9)$$

Z drugiej strony, równanie ruchu ładunku jest postaci $x = vt$, więc spełniony jest też inny związek:

$$r_{\text{ret}} = \sqrt{(x - vt_{\text{ret}})^2 + y^2 + z^2}. \quad (11.10)$$

Wystarczy zatem rozwiązać układ powyższych dwóch równań wyznaczając t_{ret} oraz r_{ret} . Pozbywając się z równań r_{ret} dostajemy:

$$c^2(t - t_{\text{ret}})^2 = (x - vt_{\text{ret}})^2 + y^2 + z^2, \quad (11.11)$$

stąd natomiast:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_{\text{ret}} = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2)}. \quad (11.12)$$

W celu obliczenia r_{ret} wystarczy wykorzystać raz jeszcze wzór (11.9) razem z wyrażeniem powyżej. Do obliczenia potencjału elektrostatycznego φ danego wyrażeniem (11.6), trzeba nam już tylko wyrażenia na $(1 - v_r/c)_{\text{ret}}$. Retardowana składowa „radialna” v_r jest równa:

$$(v_r)_{\text{ret}} = v \frac{x - vt_{\text{ret}}}{r_{\text{ret}}}. \quad (11.13)$$

Zatem retardowany mianownik wyrażenia (11.6) jest po prostu równy:

$$c(t - t_{\text{ret}}) - \frac{v}{c}(x - vt_{\text{ret}}) = c \left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_{\text{ret}} \right]. \quad (11.14)$$

Wstawiając wyrażenie (11.12) dostajemy ostatecznie:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2}. \quad (11.15)$$

I oto stała się rzecz niebywała. Nagle, z elementarnej analizy równań Maxwella (11.1) otrzymaliśmy wynik znany nam z pierwszego rozdziału – transformację Lorentza! Co prawda, nieco się napracowaliśmy, ale wynik jest tak prosty, że trudno nie zauważyć, że znając od początku poprawne wzory transformacyjne wystarczyło zrobić jeden prosty ruch, by go otrzymać: wziąć potencjał ładunku spoczywającego

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (11.16)$$

i dokonać transformacji Lorentza współrzędnych x, y i z ! Przecież nasza podstawowa zasada mówi, że nie da się stwierdzić, czy to my poruszamy się w pobliżu spoczywającego ładunku, czy też ładunek jest w ruchu, a my spoczywamy. Jeśli jednak nie zna się prawidłowych wzorów transformacyjnych, jak miało to miejsce w XIX wieku, można znaleźć ich postać poprzez analizę równań Maxwella. Tak właśnie uczynił Lorentz i Poincaré na wiele lat przed Einsteinem.

Dobrze, ale różnica pomiędzy wzorami (11.15) i (11.16) nie sprowadza się wyłącznie do transformacji Lorentza. Pojawia się jeszcze dodatkowy czynnik $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Skąd się on bierze? Otóż, gdyby go nie było, to całka z laplasjanu φ po całej przestrzeni byłaby różna dla ładunku spoczywającego i poruszającego się. Oznacza to, że w obu sytuacjach całkowity ładunek w przestrzeni (czyli po prostu rozważany ładunek punktowy) byłby różny. Dodatkowy wyraz pełni więc rolę czynnika normalizacyjnego, gwarantującego stałość ładunku we wszystkich układach odniesienia. Wkrótce dowiemy się o nim nieco więcej.

Wyprowadziliśmy postać potencjału elektrostatycznego ruchomego ładunku. Analogiczna procedura prowadzi do wniosku, że potencjał wektorowy tego ładunku jest postaci:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi. \quad (11.17)$$

Wkrótce zresztą okaże się, że związek pomiędzy φ i $\mathbf{A}$ jest głębszy, wielkości te są bowiem składowymi wspólnego czterowektora.

11.3 W POSZUKIWANIU KOLEJNYCH CZTEROWEKTORÓW

Powoli naszym oczom ukazuje się niezwykle, relatywistyczny charakter równań Maxwella. Przystąpimy teraz do szczegółowej analizy. Do opisu wielkości fizycznych, podobnie jak w mechanice klasycznej, użyjemy pojęcia czterowektora.

Równania elektrodynamiki są lokalnymi równaniami różniczkowymi, musimy się więc najpierw zastanowić, w jaki sposób uogólnić trójwymiarowy operator różniczkowy ∇ , który w działaniu na pole skalarne dawał pole wektorowe niezależne od układu odniesienia. Podobnie, jak we wcześniejszych rozdziałach wprowadzaliśmy pojęcie czteropolożenia $(ct, \mathbf{r})$, tak obecnie narzuca się następująca definicja *czterogradientu*: $\nabla^\mu = (\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla)$. Przekonajmy się, czy tak zdefiniowany obiekt posiada wymagane własności, to znaczy, czy jest współzmienniczy. Z jednej strony operator ∇^μ powinien transformować się jak przystało na czterowektor:

$$\nabla'^\mu = \left(\frac{\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{V}{c} \nabla^x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{\nabla^x - \frac{V}{c} \frac{\partial}{c\partial t}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \nabla^y, \nabla^z \right), \quad (11.18)$$

z drugiej, zwykłe zasady zamiany zmiennych przy różniczkowaniu wymagają by zachodził związek:

$$\begin{aligned}
\nabla'^\mu &= \left(\frac{\partial}{c \partial t'}, \nabla' \right) = \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial x}{c \partial t'} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c \partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{c \partial t}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{\partial}{c \partial t} + \frac{V}{c} \nabla^x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{\nabla^x + \frac{V}{c} \frac{\partial}{c \partial t}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \nabla^y, \nabla^z \right). \tag{11.19}
\end{aligned}$$

Warunek współmienniczości wymaga, by obie metody prowadziły to jednego wyniku, jednak widać, że z naszymi wzorami jest coś nie tak, bo pojawia się rozbieżność – wyniki różnią się dwoma znakami. Wygląda na to, że nasz wybór czterogradientu nie był najlepszy, ale możemy w prosty sposób skorygować przyjętą definicję by otrzymać operator transformujący się współmienniczo. W tym celu zdefiniujemy:

$$\nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, -\nabla \right). \tag{11.20}$$

Widać od razu, że ta definicja jest zgodna z transformacjami zamiany zmiennych różniczkowych (11.19). Zatem powyższy operator ∇^μ posiada odpowiednie własności. Jest to właśnie poszukiwany czterogradient.

Powróćmy do równań Maxwella. Jak wiemy, wynika z nich lokalne równanie ciągłości ładunku elektrycznego:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{11.21}$$

Ażeby je wyprowadzić, wystarczy obliczyć pochodną po czasie pierwszego z równań (11.1), zamienić kolejność pochodnej po czasie i dywergencji, a następnie wstawić do tak otrzymanego wzoru czwarte równanie (11.1). Oczywiście, równanie ciągłości wyrażające lokalną zasadę zachowania ładunku musi być spełnione we wszystkich układach odniesienia. Oznacza to, że postać tego równania nie może się zmieniać przy zmianie układu inercjalnego. Zwróćmy uwagę, że lewą stronę tego równania można zapisać jako czterowektorowy iloczyn czterogradientu i następującego nowego czterowektora $\mathbf{j}^\mu = (c\varrho, \mathbf{j})$:

$$\eta_{\mu\nu} \nabla^\mu \mathbf{j}^\nu = 0, \tag{11.22}$$

o ile, rzecz jasna, $\mathbf{j}^\mu$ jest poprawnym czterowektorem. I tak właśnie musi być ażeby równanie ciągłości było spełnione w każdym układzie odniesienia. Nowy czterowektor nazywamy

czteroprądem. Jego czasowa składowa to gęstość ładunku elektrycznego, a składowa przestrzenna to gęstość prądu. Możemy zresztą zauważyć coś ogólniejszego: jakakolwiek para wielkości spełniających równanie ciągłości we wszystkich układach inercjalnych musi tworzyć czterowektor. Czteroprąd jest tylko przykładem tej zasady.

Zapiszemy teraz równania Maxwella 11.1 w nieco zmienionej postaci. Dzięki temu będziemy mogli zauważyć kolejną ciekawą rzecz. Przekonamy się mianowicie, jakie są dalsze konsekwencje relatywistycznej niezmienniczości równań Maxwella.

W tym celu, zamiast posługiwać się polami $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ użyjemy ich potencjałów. Z drugiego z równań (11.1) wynika, że pole magnetyczne można wyrazić jako rotację pola wektorowego: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Wstawiając to do trzeciego równania (11.1) dostajemy:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (11.23)$$

W przypadku elektrostatycznym rotacja pola elektrycznego znika, i dlatego zamiast niego możemy posługiwać się potencjałem skalarnym φ . Jest tak zawsze: ilekroć rotacja jakiegoś pola wektorowego znika, możemy równoważnie używać potencjału skalarne, z którego możemy „odzyskać” pole biorąc po prostu gradient. Wynika stąd, że wyrażenie znajdujące się pod rotacją w równaniu (11.23) możemy zastąpić (minus) gradientem pewnego potencjału skalarne φ . Wynika stąd, że:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (11.24)$$

W szczególnym przypadku pól stałych w czasie dostajemy znany związek $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Wstawiając wzór (11.24) do pozostałych dwóch równań Maxwella (11.1) dostajemy:

$$-\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi \right).$$

Obydwa równania wyglądają teraz odrażająco. Zamiast obiecywanej prostoty mamy przed sobą bardzo skomplikowane wyrażenia. Jednak prostotę można odzyskać jednym sprytnym posunięciem. Przypomnijmy sobie, że pole $\mathbf{B}$ nie określa w sposób jednoznaczny potencjału

wektorowego $\mathbf{A}$. Dowolność, która pozostaje, nazywana *dowolnością cechowania* sprowadza się do faktu, że możemy narzucić dowolny warunek na dywergencję potencjału wektorowego. Aby uprościć otrzymane wzory wybierzemy tę dywergencję w bardzo szczególny sposób. Przyjmiemy mianowicie warunek, zwany *cechowaniem Lorentza*:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (11.25)$$

Wówczas oba równania Maxwella uproszczą się do:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{j}}{c^2 \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Nasze przekształcenia powoli zaczynają nabierać sensu. Zauważmy, że operator różniczkowy po lewej stronie równań jest relatywistycznym niezmiennikiem, gdyż jest to kwadrat czterogradientu. Prawe strony równań odpowiadają dwóm składowym czteroprądu, zatem ażeby lewe strony równań miały te same własności transformacyjne, wielkości $(\frac{\rho}{c}, \mathbf{A})$ muszą być także składowymi czterowektora. Czterowektor ten oznaczmy $\mathbf{A}^\mu$ i nazywać będziemy *czteropotencjałem*. W tej sytuacji możemy obydwie powyższe równania zapisać jednym, czterowektorowym:

$$\square \mathbf{A}^\mu = \frac{\mathbf{j}^\mu}{c^2 \varepsilon_0}, \quad (11.27)$$

gdzie $\square \equiv \eta_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \nabla^\beta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Wraz z warunkiem cechowania Lorentza i przepisem na wyrażanie pól $\mathbf{E}$ oraz $\mathbf{B}$ poprzez składowe czterowektora $\mathbf{A}^\mu$, mamy tu wszystkie równania Maxwella w jednym. Jak miło.

11.4 ENERGIA I PĘD POLA

Raczej nas nie dziwi, że pole elektromagnetyczne niesie pewną energię. Powinniśmy zatem oczekiwać, że w związku z tym pole to może posiadać także pewien pęd. W jaki sposób

wyznaczyć energię i pęd pola? Pomanipulujmy nieco równaniami Maxwella (11.1). Mnożąc skalarnie trzecie równanie przez $\mathbf{B}$, a czwarte przez $\mathbf{E}$, a następnie odejmując stronami otrzymujemy:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (11.28)$$

Lewa strona otrzymanego wyrażenia równa się po prostu $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$, zatem możemy przepisać otrzymany wynik w następującej formie:

$$\varepsilon_0 \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (11.29)$$

Po prawej stronie znajduje się wyrażenie $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ – jest to wzięta z przeciwnym znakiem praca sił pola, która została wykonana nad przewodnikiem, w którym płynie prąd o gęstości $\mathbf{j}$. Innymi słowy jest to ubytek energii zawartej początkowo w polu elektromagnetycznym, która mogła zostać zużyta na przykład na rozgrzanie przewodnika. Ubytek ten równa się lewej stronie równania, która opisuje zatem zmianę energii zawartej w polu elektromagnetycznym. W przypadku, gdy pole nie wykonuje żadnej pracy powyższy wzór przechodzi w równanie ciągłości typu (11.21) wyrażające lokalną zasadę zachowania energii pola elektromagnetycznego:

$$\frac{\partial \varrho_E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (11.30)$$

przy czym pojawiające się w nim wielkości

$$\begin{aligned} \varrho_E &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}), \\ \mathbf{S} &= \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (11.31)$$

odpowiadają lokalnej gęstości energii pola elektromagnetycznego oraz gęstości strumienia energii (lub mówiąc inaczej gęstości pędu pola) zwanej *wektorem Poyntinga*. Mogłoby się wydawać, że wielkości $(c\varrho_E, \mathbf{S})$ tworzą czterowektor gęstości energii-pędu pola, bo wówczas równanie (11.30) byłoby spełnione w każdym układzie i energia pola byłaby lokalnie

zachowana we wszystkich układach inercjalnych. Tak jednak nie jest dlatego, że równanie (11.30) wcale nie jest spełnione w każdym układzie. Pamiętajmy, że sama energia pola nie jest w ogólności zachowana i może być zamieniona w inny rodzaj energii. Pokazuje to równanie (11.29), które spełnione jest w ogólności. Zatem nawet jeśli dla pewnego obserwatora znika gęstość prądu $\mathbf{j}$, to inny obserwator może twierdzić co innego, gdyż $\mathbf{j}$ jest składową czterowektora. Jeśli natomiast w pewnym obszarze przestrzeni zarówno gęstość ładunku, jak i gęstość prądu znikają, to w tym szczególnym przypadku wielkości $(c\rho_E, \mathbf{S})$ transformują się jak czterowektor, choć w ogólności go nie tworzą.

11.5 TRANSFORMACJE PÓŁ

Skoro $\mathbf{A}^\mu$ jest czterowektorem, to wiemy jak transformuje się potencjał skalarny i wektorowy przy zmianie układu odniesienia. Szukane przekształcenia są po prostu transformacjami Lorentza. Znając własności transformacyjne czteropotencjału możemy odpowiedzieć na kolejne pytanie: co dzieje się z polem elektromagnetycznym przy zmianie układu odniesienia?

W poprzednich rozdziałach otarliśmy się już o ten problem. Doszliśmy wówczas do wniosku, że w ruchomym układzie mogą pojawić się pola, których nie było w układzie spoczywającym. W tym momencie możemy już zastanowić się w jaki sposób wyznaczyć te pola w sposób ogólny. Ponieważ $\mathbf{A}^\mu$ jest czterowektorem, to przy przejściu do układu poruszającego się z prędkością V wzdłuż osi x , potencjały zmieniają się zgodnie ze wzorami Lorentza:

$$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{r}', t') &= \frac{\varphi(\mathbf{r}, t) - V A^x(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ A'^x(\mathbf{r}', t') &= \frac{A^x(\mathbf{r}, t) - \varphi(\mathbf{r}, t)/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Widzimy, że poprawna transformacja wymaga przekształcenia nie tylko samych potencjałów, ale także współrzędnych od których te zależą. Odpowiedź na pytanie o postać przetransformowanych pól wymaga już tylko odpowiedniego zróżniczkowania potencjałów. Pominiemy szczegóły rachunkowe (zostawiamy je Czytelnikowi) i podamy od razu wynik:

$$\begin{aligned}
E'^x &= E^x \\
E'^y &= \frac{E^y - VB^z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
E'^z &= \frac{E^z + VB^y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
B'^x &= B^x \\
B'^y &= \frac{B^y + VE^z/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
B'^z &= \frac{B^z - VE^y/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},
\end{aligned} \tag{11.32}$$

gdzie opuściliśmy w zapisie zależność pól od odpowiednich współrzędnych (jest ona taka sama jak we wzorach (11.32)). Powyższe, dość skomplikowane wzory transformacyjne możemy też zapisać w sposób bardziej zwarty i ogólny:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\
\mathbf{E}'^{\perp} &= \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})^{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\
\mathbf{B}'^{\perp} &= \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2)^{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{11.33}$$

Widzimy teraz, jak na dłoni, że składowe pól równoległe do kierunku prędkości nie zmieniają się, w przeciwieństwie do składowych poprzecznych. To spostrzeżenie jest jednak nie do końca słuszne. Pamiętajmy bowiem, że niezależnie od transformacji pól, należy także przekształcić współrzędne od których pola zależą.

Możemy to prześledzić na konkretnym przypadku. Rozważmy pole elektryczne ładunku punktowego poruszającego się ze stałą prędkością v wzdłuż osi x . Pole to możemy znaleźć transformując pole ładunku spoczywającego w układzie nieprimowanym o współrzędnych x, y, z, t do układu o współrzędnych primowanych x', y', z', t' poruszającego się z prędkością $-v$ (wyjątkowo w tym wykładzie przyjęta została notacja odwrotna do dotychczas stosowanej – układ primowany porusza się z prędkością $-v$, a nie v):

$$\begin{aligned} E'^x(x', y', z', t') &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E'^y(x', y', z', t') &= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E'^z(x', y', z', t') &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (11.34)$$

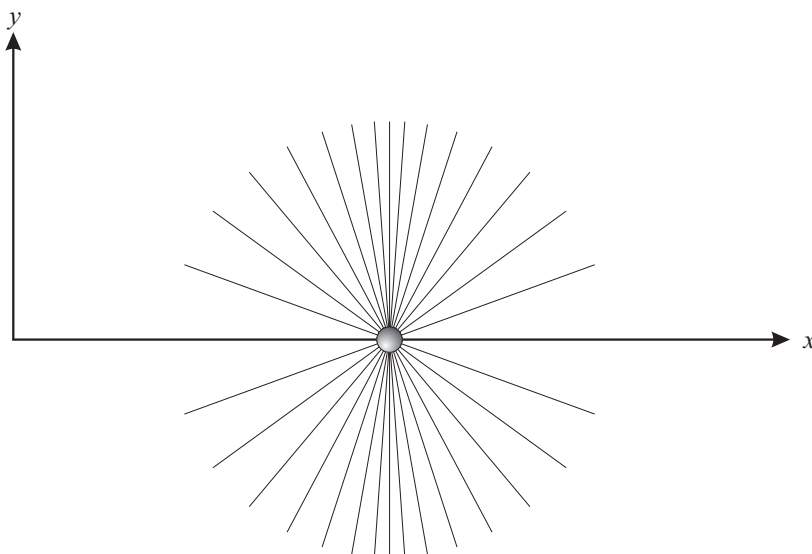
gdzie współrzędne nieprimowane należy traktować jako funkcje współrzędnych primowanych. Zwróćmy uwagę, że:

$$\frac{E'^x}{E'^y}(x', y', z', t') = \frac{x}{y}\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{x' - vt'}{y'}, \quad (11.35)$$

czyli pole poruszającego się ładunku jest skierowane radialnie. Jednakże pole wzdłuż toru ruchu jest słabsze niż pole w płaszczyźnie prostopadłej:

$$\begin{aligned} E'^x(x', 0, 0, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x'^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ E'^y(0, y', 0, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y'^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Jest jednak jeszcze ciekawiej. Pole elektryczne ruchomego ładunku jest dokładnie takie, jak gdyby cała przestrzeń razem z polem uległa skróceniu Lorentza! – rysunek 11.2. Powiedzieliśmy „jak gdyby”, bo nie możemy wyobrazić sobie, że pole elektromagnetyczne ruchomego ładunku po prostu się „ściska”. Pamiętajmy, że pojawia się dodatkowe pole magnetyczne, którego nie ma, gdy ładunek spoczywa. Pole to „okręża” prostą, po której porusza się ładunek, a na samej osi jest równe zero.



Rysunek 11.2: Linie pola elektrycznego ładunku poruszającego się ze stałą prędkością wzdłuż osi x .

11.6 SIŁA LORENTZA I III PRAWO NEWTONA

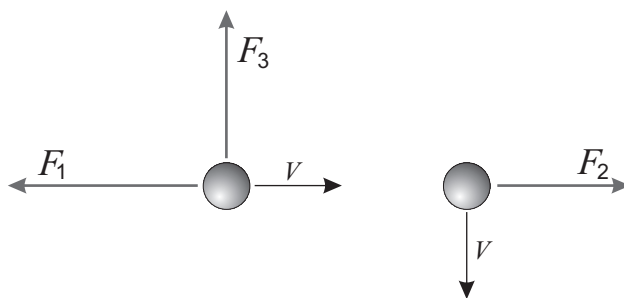
Wiemy już co nieco na temat pola elektromagnetycznego. Do pełni szczęścia brakuje nam już tylko wiedzy na temat tego, w jaki sposób pole to wpływa na dynamikę ładunków elektrycznych. Nie będzie chyba niespodzianką postać II prawa Newtona (8.19) dla ładunku q umieszczonego w polu $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (11.37)$$

gdzie $\mathbf{v}$ jest prędkością ładunku w rozważanym układzie inercyjnym. Jest to po prostu siła Lorentza, podobnie jak równania Maxwella, od początku relatywistyczna.

Na koniec tego rozdziału podamy interesujący paradoks. Wyobraźmy sobie dwa ładunki q poruszające się jednostajnie wzdłuż prostopadłych prostych – rysunek 11.3. W rozważanej chwili ładunek poruszający się pionowo akurat przecina tor ładunku poruszającego się poziomo. Pytamy, ile wynoszą siły działające na oba ładunki. Udzielenie odpowiedzi nie jest trudne, bo znamy wzór Lorentza oraz pole elektromagnetyczne poruszającego się ładunku.

Siła działająca na ładunek poruszający się w dół jest czysto elektryczna, bo pole magnetyczne na osi ruchu ładunku poruszającego się poziomo znika. Na rysunku 11.3 jest to siła F_2 . Na drugi ładunek działa analogiczna siła elektryczna F_1 , ale jej wartość musi



Rysunek 11.3: Czy III prawo Newtona jest łamane?

być większa, gdyż pole elektryczne w płaszczyźnie prostopadłej do ruchu jest silniejsze niż wzdłuż toru – wzory (11.36). Pojawia się jeszcze dodatkowa siła magnetyczna F_3 działająca na ładunek poruszający się w prawo. Działa ona prostopadle do obu pozostałych sił. Czyżby więc III prawo Newtona w teorii względności nie obowiązywało? Przypomnijmy w tym miejscu *twierdzenie Noether*: z symetrii przestrzeni względem przesunięć musi wynikać prawo zachowania pędu, z którego zaś wynika III prawo Newtona. Rozwiązanie paradoksu pozostawiamy Czytelnikowi na długie, zimowe wieczory...

11.7 ELEKTRODYNAMIKA VS ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI*

Zdarza się słyszeć opinię, jakoby zasada równoważności Einsteina kłóciła się z wnioskami płynącymi z elektrodynamiki. Na poparcie tej tezy podawany jest często następujący przykład. Wiadomo, że ładunek poruszający się z przyspieszeniem jest źródłem promieniowania. Jednakże ładunek umieszczony nieruchomo w polu grawitacyjnym raczej nie promieniuje, choć wydawałoby się, że powinien, skoro umieszczenie go w polu grawitacyjnym ma być rzekomo równoważne umieszczeniu go nieruchomo wraz z obserwatorem w przyspieszającej rakiecie.

Argument brzmi rozsądnie, wydaje się, że zasada równoważności otrzymała celne trafienie. Jakże by się z tego wykaraskać? Zbadajmy, jak zachowuje się ładunek poruszający się ruchem jednostajnie przyspieszonym z punktu widzenia spoczywającego, inercyjnego

*Omówione tu zagadnienie wciąż jest przedmiotem żywej dyskusji, w której brały niegdyś udział najznamienitsze postaci fizyki teoretycznej takie jak Pauli, Feynman, czy Peierls, niekoniecznie zgadzając się ze sobą. Problem jest bardzo subtelny, a rachunki nieco złożone i wszystko to sprawia, że jest to materiał dla ambitnego Czytelnika.

obserwatora. Następnie przeanalizujemy sytuację w układzie nieinercyjnym, w którym ładunek spoczywa. Jeśli okaże się, że ładunek rzeczywiście promieniuje, będziemy w tarapatach.

Powinniśmy rozpocząć od wyznaczenia potencjałów Liénarda-Wiecherta (11.7) i (11.8) dla naładowanej cząstki o ładunku q , poruszającej się wzdłuż toru (9.13) z $y = z = 0$. Ruch cząstki wygodnie będzie nam parametryzować jej czasem własnym τ_0 :

$$\begin{aligned} x(\tau_0) &= \frac{c^2}{a} \cosh \frac{a\tau_0}{c} \\ v(\tau_0) &= c \operatorname{tgh} \frac{a\tau_0}{c} \\ \frac{at}{c} &= \sinh \frac{a\tau_0}{c}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Rozważmy potencjał φ i potencjał wektorowy $\mathbf{A}$ w punkcie o współrzędnych $(ct, \mathbf{r}_B)$. Równanie wyznaczające czas retardowany ma postać:

$$c^2(t - t_{\text{ret}})^2 = (x_B - x(t_{\text{ret}}))^2 + y_B^2 + z_B^2. \quad (11.39)$$

Stosując podstawienie $\psi = \frac{at_{\text{ret}}}{c}$, $ct = \rho \sinh \phi$ oraz $x_B = \rho \cosh \phi$ otrzymujemy:

$$\left(\rho \sinh \phi - \frac{c^2}{a} \sinh \psi \right)^2 = \left(\rho \cosh \phi - \frac{c^2}{a} \cosh \psi \right)^2 + y_B^2 + z_B^2. \quad (11.40)$$

Podnosząc nawiasy do kwadratu, porządkując wyrazy i korzystając z tożsamości $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$ istotnie upraszczamy powyższe wyrażenie:

$$\cosh(\psi - \phi) = \frac{\rho^2 + y_B^2 + z_B^2 + (c^2/a)^2}{2\rho c^2/a}. \quad (11.41)$$

Zaś z równań (11.38) i (11.39) otrzymujemy wzór na retardowany mianownik potencjałów Liénarda-Wiecherta:

$$\left(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)_{\text{ret}} = c(t - t_{\text{ret}}) - (x_B - x_{\text{ret}}) \frac{v_{\text{ret}}}{c} = \rho \frac{\sinh(\phi - \psi)}{\cosh \psi}, \quad (11.42)$$

gdzie w ostatniej równości wstawiliśmy $ct = \rho \sinh \phi$, $ct_{\text{ret}} = \frac{c^2}{a} \sinh \psi$, $x_{\text{B}} = \rho \cosh \phi$, $x_{\text{ret}} = \frac{c^2}{a} \cosh \psi$ i $v_{\text{ret}} = c \tanh \psi$ oraz użyliśmy tożsamości $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$. Wyprowadzony wzór pozwala podać ostateczną postać samych potencjałów (11.7) i (11.8):

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}_{\text{B}}, t) &= -\frac{q \cosh \psi}{4\pi\epsilon_0\rho \sinh(\psi - \phi)} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\text{B}}, t) &= \frac{qc \sinh \psi}{4\pi\epsilon_0\rho \sinh(\psi - \phi)} \hat{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{11.43}$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}$ jest wersorem wzdłuż kierunku przyspieszenia. Możemy teraz przejść do kontr-ataku. Rozważmy pole elektromagnetyczne wytwarzane przez przyspieszany ładunek w chwili $t = 0$, czemu odpowiada $\phi = 0$. Od razu widać, że wówczas potencjał wektorowy jest odwrotnie proporcjonalny do współrzędnej x_{B} : $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{\text{B}}, 0) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0 x_{\text{B}}} \hat{\mathbf{x}}$, a zatem związane z nim pole magnetyczne $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$. Znikanie pola magnetycznego oznacza, że znika strumień energii pola elektromagnetycznego $\mathbf{S}$, który jest proporcjonalny do iloczynu wektorowego $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Oznacza to, że w układzie chwilowo współporuszającym się z ładunkiem jednostajnie przyspieszanym wcale nie ma promieniowania. Układ chwilowo współporuszający się jest zaś chwilowo tożsamy z układem nieinercyjnym, w którym cząstka cały czas spoczywa. Ponieważ w układzie przyspieszanym żadna chwila nie jest wyróżniona, to w układzie nieinercyjnym pole magnetyczne, a zatem i moc promieniowania przez cały czas będą zerowe. Nie ma więc również sprzeczności z zasadą równoważności.

O co więc tyle krzyku? O to, że można przedstawić alternatywne rozumowanie prowadzące do konkluzji, że w układzie inercyjnym, w którym ładunek porusza się z przyspieszeniem (a nie „spoczywa z przyspieszeniem”, jak było w układzie nieinercyjnym), pojawia się promieniowanie. Oto owo rozumowanie.

Wyprowadźmy najpierw wzór na pole elektryczne i magnetyczne wynikające z potencjałów (11.43). Pole elektryczne dane jest wyrażeniem $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, które po kilku przekształceniach prowadzi do następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
E^x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\varrho \sinh^2(\psi - \phi)} \frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0c^2\varrho^2} \frac{\varrho - \frac{c^2}{a} \cosh(\psi - \phi)}{\sinh^3(\psi - \phi)} \\
E^y &= \frac{q \cosh \phi}{4\pi\epsilon_0\varrho \sinh^2(\psi - \phi)} \frac{\partial\psi}{\partial y_B} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0c^2\varrho^2} \frac{y_B \cosh \phi}{\sinh^3(\psi - \phi)} \\
E^z &= \frac{q \cosh \phi}{4\pi\epsilon_0\varrho \sinh^2(\psi - \phi)} \frac{\partial\psi}{\partial z_B} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0c^2\varrho^2} \frac{z_B \cosh \phi}{\sinh^3(\psi - \phi)}.
\end{aligned} \tag{11.44}$$

Podobnie, składowe pola magnetycznego $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ wynoszą:

$$\begin{aligned}
B^x &= 0 \\
B^y &= -\frac{q \sinh \phi}{4\pi\epsilon_0c\varrho \sinh^2(\psi - \phi)} \frac{\partial\psi}{\partial z_B} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0c^3\varrho^3} \frac{ctz_B}{\sinh^3(\psi - \phi)} \\
B^z &= \frac{q \sinh \phi}{4\pi\epsilon_0c\varrho \sinh^2(\psi - \phi)} \frac{\partial\psi}{\partial y_B} = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0c^3\varrho^3} \frac{cty_B}{\sinh^3(\psi - \phi)}.
\end{aligned} \tag{11.45}$$

Gęstość energii pola elektromagnetycznego $\varrho_E = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$ w dowolnym punkcie czasoprzestrzeni wynosi:

$$\varrho_E = \frac{q^2 a^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^4 \varrho^4 \sinh^6 \phi} \left[\left(\varrho - \frac{c^2}{a} \cosh \phi \right)^2 + (y_B^2 + z_B^2) \left(\frac{c^2 t^2}{\varrho^2} + \cosh^2 \phi \right) \right]. \tag{11.46}$$

Obliczmy gęstość energii pola wygenerowanego przez ruch ładunku pomiędzy retardowanymi chwilami 0 i dt , co odpowiada retardowanemu czasowi własnemu $\tau_0 = 0$, czyli $\psi = 0$. Gęstość tę wyznaczymy na powierzchni sfery o promieniu $R = ct_B$, której środek leży w miejscu, gdzie ładunek znajdował się w chwili retardowanej $t = 0$. Rozważana sfera opisana jest równaniem $R^2 = (x_B - \frac{c^2}{a})^2 + y_B^2 + z_B^2$. Wynika stąd, że równanie (11.41) wyznaczające czas retardowany upraszcza się do następującego związku: $\cosh \phi = \frac{x}{\varrho}$. Po wstawieniu tego do równania na gęstość energii pola dostajemy po przekształceniach dwa człony, z których pierwszy nie zależy od przyspieszenia cząstki, a drugi proporcjonalny jest do kwadratu przyspieszenia:

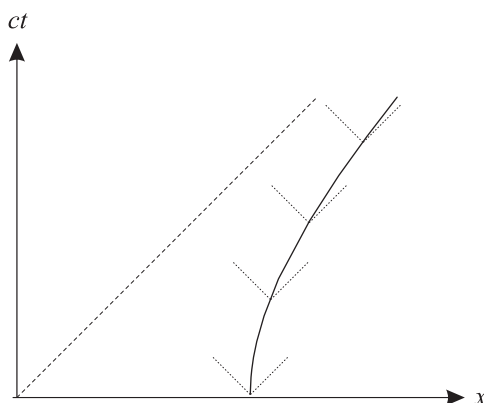
$$\varrho_E = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} + \frac{q^2 a^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^4 R^4} (y_B^2 + z_B^2). \quad (11.47)$$

Jak łatwo sprawdzić, pierwszy człon odpowiada po prostu energii pola elektrostatycznego wytworzonego przez cząstkę spoczywającą w środku sfery o promieniu R . Drugi człon natomiast, to, ni mniej ni więcej, gęstość energii promieniowania ładunku poruszającego się (choć spoczywającego) z przyspieszeniem a . Gęstość ta jest największa w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przyspieszenia i zawierającej położenie retardowane ładunku. Człon promieniowania znika natomiast wzdłuż toru ruchu. Mówiąc obrazowo – ładunek „promieniuje na boki”. Ażeby wyznaczyć jaka jest całkowita energia dE_{rad} wypromieniowana przez ładunek pomiędzy chwilami retardowanymi 0 i dt musimy wycałkować człon promieniowania po sferze o promieniu R i pomnożyć go przez grubość sfery cdt , gdyż promieniowanie to rozchodzi się radialnie z prędkością c . Całka po sferze z wyrażenia $y_B^2 + z_B^2$ równa jest po prostu $\frac{2}{3}4\pi R^4$, zatem moc promieniowania ładunku wynosi:

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \quad (11.48)$$

Wynik ten znany jest pod nazwą *wzoru Larmora*. Ziemia drży, szyszki spadają – dostaliśmy wynik mówiący niezbitcie, że w spoczywającym układzie inercjalnym przyspieszany ładunek promieniuje energię. Jak by nie patrzeć trudno nam to pogodzić z poprzednim rezultatem, zgodnie z którym ładunek obserwowany w układzie nieinercjalnym energii nie promieniuje. I znów jest dobrze, ale nie beznadziejnie.

Nie ma najmniejszych wątpliwości, że rozwiązanie tego paradoksu, które zaproponujemy poniżej zadziwi niemal każdego. Rozważmy promieniowanie obserwowane w układzie inercjalnym. Z każdego położenia, w którym znajdował się ładunek propaguje się zaburzenie pola wzdłuż pewnego stożka czasoprzestrzennego, jak przedstawiono to na rysunku 11.4. W którą stronę promieniowanie to jest emitowane? Przygotujmy się na olśnienie. Unosi ono energię w kierunku horyzontu zdarzeń obserwatora nieinercjalnego! Promieniowanie to w całości trafia za horyzont. Oznacza to, że według obserwatora nieinercjalnego energia promieniowania musi utknąć tuż nad horyzontem. Ponieważ jednak nad horyzontem zdarzeń czas współrzędnościowy się zatrzymuje, to częstość promieniowania dąży tam do zera, zatem i energia promieniowania musi zniknąć. Dokładnie tak, jak przewidział to nasz rachunek od którego rozpoczęliśmy rozważania. Niewiarygodne, prawda?



Rysunek 11.4: Stożki promieniowania przyspieszanego ładunku obserwowanego w spoczywającym układzie inercyjnym.

Pytania

Zadania

- W inercyjnym układzie odniesienia, w nieskończenie długim, prostoliniowym i obojętnym elektrycznie przewodniku o polu przekroju poprzecznego S płynie prąd o natężeniu I . Oblicz pole elektromagnetyczne wytworzone przez przewodnik, a następnie dokonaj transformacji tego pola do układu odniesienia poruszającego się wzdłuż przewodnika z prędkością V . Udowodnij, że identyczny wynik można uzyskać transformując źródła pól (gęstości ładunków oraz prądy), a następnie obliczając dla nich pola w nowym układzie.
- W inercyjnym układzie odniesienia, w nieskończenie długim, prostoliniowym i obojętnym elektrycznie przewodniku o polu przekroju poprzecznego S płynie prąd o natężeniu I . W pewnej odległości d porusza się z prędkością V prostopadłą do kierunku przepływu prądu ładunek q . Oblicz pole elektromagnetyczne wytwarzane przez prąd i siłę oddziaływania przewodnika na ładunek, a następnie podaj wynik w układzie związanym z ładunkiem. Czy bez wykonywania obliczeń można powiedzieć skąd się bierze siła w drugim układzie?
- W inercyjnym układzie odniesienia stałe pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ nie są prostopadłe. Czy istnieje układ odniesienia, w którym pola są prostopadłe? Jeśli tak, wyznacz jego prędkość.

- W inercjalnym układzie odniesienia stałe pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ nie są prostopadłe. Czy istnieje układ odniesienia, w którym pola są równoległe? Jeśli tak, wyznacz jego prędkość.
- Zbadaj własności transformacyjne iloczynu skalarnego $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$.
- Zbadaj własności transformacyjne kombinacji pól $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

Część II

A P O K R Y F Y

Rozdział 12

DLACZEGO DIABEŁ GRA W KOŚCI?

Bóg nie gra w kości. –Albert Einstein

Przestań wreszcie mówić Bogu, co ma robić. –Niels Bohr

Zakończyliśmy poznawanie szczególnej teorii względności w jej doktrynalnym ujęciu. Jeśli wszystko poszło zgodnie z planem, powinna ona być dla nas teorią prostą, intuicyjną, a przede wszystkim szalenie interesującą. Wypracowana płaszczyzna porozumienia posłuży nam teraz jako pole dalszej walki. To, co nastąpi od tego momentu, stanowić będzie próbę wyjścia poza ortodoksyjny schemat i gruntownego przemyślenia go od samego początku. Jest bowiem coś, być może mało istotnego, a być może szalenie ważnego, na co nie zwróciliśmy uwagi. Coś, co może sprawić, że nasze rozumienie teorii względności kompletnie się wywróci i zmusi do wykonania wielkiego wysiłku, by zrozumieć ją na nowo. Czy rzeczywiście coś może nas jeszcze zaskoczyć? Zapnijmy pasy, będzie trzęsło!

12.1 CO WSPÓLNEGO MA PRĘDKOŚĆ ŚWIATŁA ZE ŚWIATŁEM?

Zapewne zdążyliśmy już przyzwyczać się do myśli, że teoria względności, którą poznawaliśmy przez cały ten wykład ma swoje źródło w fundamentalnym postulacie, że światło w próżni w każdym układzie inercyjnym porusza się ze stałą prędkością równą c . Przed nami kolejna niespodzianka. Otóż tkwiliśmy w błędzie, bowiem teoria względności do swojego istnienia wcale nie potrzebuje założenia stałości prędkości światła. Przeciwnie, fakt ten jest

konsekwencją bardziej intuicyjnej, a zarazem o wiele głębszej własności czasoprzestrzeni. Zasada, o której będzie tu mowa znana jest od 1910 roku, a my przedstawimy wersję wyprowadzenia pochodzącego od Andrzeja Szymachy nieco dodatkowo zmodyfikowaną.

Powróćmy zatem do samego początku i spójrzmy na rysunek 1.1 przedstawiający dwa inercjalne układy odniesienia we względnym ruchu z prędkością V . Naszym celem będzie ponowne wyznaczenie znanej nam już transformacji Lorentza pomiędzy współrzędnymi tych układów, tym razem jednak nie będziemy zakładać niezmienniczości prędkości światła. W pierwszym rozdziale powiedzieliśmy, że poszukiwana transformacja powinna być liniowa. W przeciwnym razie przesunięcie początku układu współrzędnych lub przestawienie zegara zmieniałoby postać transformacji, zatem czasoprzestrzeń nie byłaby jednorodna. My zaś żądamy, by przesunięcie laboratorium o jeden metr lub opóźnienie eksperymentu, który jest w nim wykonywany o jedną sekundę nie zmieniało praw fizyki panujących w laboratorium, co oznacza, że poszukiwana transformacja współrzędnych rzeczywiście powinna być liniowa:

$$x' = A(V)x + B(V)t$$

$$x = A(-V)x' + B(-V)t', \quad (12.1)$$

gdzie $A(V)$ i $B(V)$ są poszukiwanymi funkcjami prędkości względnej układów. Postać drugiego równania wynika z przyjętej przez nas zasady, że jeśli ciało **A** porusza się z prędkością $\mathbf{V}$ względem ciała **B**, to ciało **B** musi poruszać się z prędkością $-\mathbf{V}$ względem ciała **A**, o ile oczywiście odpowiednie osie obu układów są równoległe. Prędkość V z definicji opisuje ruch początku układu współrzędnych primowanych $x' = 0$ równaniem $x = Vt$. Wstawiając ten warunek do pierwszego z równań (12.1) otrzymujemy związek pomiędzy współczynnikami transformacji: $\frac{B(V)}{A(V)} = -V$. Możemy dzięki temu pobyć się z transformacji funkcji $B(V)$ otrzymując po elementarnych przekształceniach:

$$x' = A(V)(x - Vt)$$

$$t' = A(V) \left(t - \frac{A(V)A(-V) - 1}{V^2 A(V)A(-V)} Vx \right). \quad (12.2)$$

Rozważmy teraz trzy układy współrzędnych poruszające się względem siebie wzdłuż wspólnej osi $x \parallel x' \parallel x''$. Niech primowany układ odniesienia porusza się z prędkością V_1 względem

układu nieprimowanego, a bisowany porusza się z prędkością V_2 względem primowanego. Transformację pomiędzy współrzędnymi układu nieprimowanego i bisowanego otrzymujemy iterując wzory transformacyjne (12.2):

$$x'' = A(V_1)A(V_2)x \left(1 + V_1V_2 \frac{A(V_1)A(-V_1) - 1}{V_1^2 A(V_1)A(-V_1)} \right) - A(V_1)A(V_2)(V_1 + V_2)t. \quad (12.3)$$

Transformację odwrotną można otrzymać na dwa sposoby. Pierwszy polega na zamianie $V_1 \mapsto -V_2$ oraz $V_2 \mapsto -V_1$, natomiast drugi na odbiciu czasu, czyli zamianie znaków wszystkich prędkości. Złożenie obydwu transformacji musi być identycznością, to zaś oznacza, że wzór (12.3) powinien być symetryczny ze względu na zamianę V_1 i V_2 . Wszystkie wyrazy z wyjątkiem ułamka w nawiasie są w tym wzorze symetryczne. Wymóg symetrii prowadzi zatem do następującego warunku:

$$\frac{A(V_1)A(-V_1) - 1}{V_1^2 A(V_1)A(-V_1)} = \frac{A(V_2)A(-V_2) - 1}{V_2^2 A(V_2)A(-V_2)}. \quad (12.4)$$

Równość funkcji w dwóch dowolnych argumentach V_1 i V_2 oznacza, że funkcja ta musi być równa pewnej stałej K :

$$\frac{A(V)A(-V) - 1}{V^2 A(V)A(-V)} = K. \quad (12.5)$$

Nieznana stała K ma wymiar odwrotności kwadratu prędkości. Powróćmy teraz do równań (12.2) i rozważmy ponownie zamianę upływu czasu na przeciwną $t \mapsto -t$ w układzie nieprimowanym. Jeśli chcemy, by operacja ta nie zmieniała współrzędnej przestrzennej x' , a jedynie $t' \mapsto -t'$ w układzie primowanym, to poszukiwana funkcja $A(V)$ powinna być parzysta: $A(-V) = A(V)$. Wynik ten pozwala wyznaczyć z warunku (12.5) $A(V) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - KV^2}}$, przy czym ciągłość przy przejściu granicznym $V \rightarrow 0$, dla którego rządamy $A(0) = 1$ wymaga wybrania rozwiązania z dodatnim znakiem. Po wstawieniu do wzorów (12.2) otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - KV^2}} \\ t' &= \frac{t - KVx}{\sqrt{1 - KV^2}}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

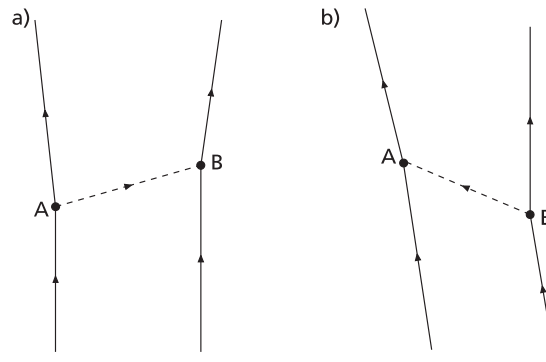
Nieznana stała K ma oczywiście fundamentalne znaczenie, gdyż parametryzuje transformacje pomiędzy dowolnymi układami inercjalnymi i można powiedzieć, że określa ona własności czasoprzestrzeni. Jej wartość jest *a priori* nieznana, K może zniknąć, być dodatnia lub ujemna. Pierwsze dwie możliwości odpowiadają transformacji Galileusza i Lorentza. Natomiast scenariusz, w którym $K < 0$, opisuje czterowymiarową, euklidesową czasoprzestrzeń z czwartym wymiarem t rozciągniętym o czynnik $\sqrt{-K}$, a wyprowadzona transformacja (12.7) jest zwykłym obrotem w płaszczyźnie xt o kąt $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{-K}V$. Można by wręcz powiedzieć, że dla dowolnej pary wymiarów przestrzennych $K = -1$ i tylko jeden wymiar czasoprzestrzeni wyróżniony jest dodatniością charakteryzującej go stałej $K = \frac{1}{c^2}$. Dlaczego tak właśnie jest? Tego nikt nie wie.

12.2 BEZPRZYCZYNOWOŚĆ

Jeśli chodzi o niemożność poruszania się z prędkościami nadświatłymi, dawno temu postawiliśmy kropkę nad *i*. Teraz będziemy ją wywabiać. W rozdziale 1.5 pokazaliśmy, że istnienie cząstek poruszających się z prędkościami nadświatłymi prowadziło do zachwiania związków przyczynowo-skutkowych i na tej podstawie odrzuciliśmy taką ewentualność. Jednak wkrótce potem cały rozdział 5 poświęciliśmy na pokazanie, że tak się podejrzenie składa, iż rzeczywistość na fundamentalnym poziomie posiada zachwianą przyczynowość. Czy to tylko zbieg okoliczności? A może warto pogłębić nasze przemyślenia na temat obiektów nadświatłych?

Powróćmy do argumentacji użytej przez nas do odrzucenia hipotezy nadświatłych cząstek. Rozważmy sygnał wysłany z prędkością $w > c^*$ z punktu A do odległego odbiorcy, który rejestruje sygnał w B – rysunek 12.1a). Przypuśćmy, że sygnał ten informuje odległego jegomościa, jakie liczby padły przed momentem w losowaniu totolotka. Nasza encyklopedyczna wiedza nie pozwala nam nie zauważyć, że istnieje inny układ inercjalny, poruszający się z prędkością $V > c^2/w$, w którym przebieg zdarzeń jest zgoła inny – rysunek 12.1b). W drugim układzie kolejność zdarzeń ulega odwróceniu i to odbiorca staje się jakby nadawcą, a nadawca wręcz przeciwnie. I abstrahując od tego, jak dziwna byłaby to sytuacja widzimy, że w tym układzie B zna wyniki losowania jeszcze zanim zostanie o nich poinformowany. Lub wręcz zanim w ogóle zostaną ogłoszone. Zatem mógłby on potencjalnie użyć drugiego sygnału, by poinformować A o wynikach zbliżającego się losowania.

*prędkości nadświatłne oznaczać będziemy dla odróżnienia literą w .



Rysunek 12.1: Diagramy czasoprzestrzenne ilustrujące proces przesłania nadświatłowej cząstki z punktu widzenia dwóch obserwatorów inercjalnych: a) cząstka wyemitowana w A i zaabsorbowana w B, b) Proces odwrotny. Na obydwu diagramach, podobnie jak i w wszystkich innych w tym rozdziale, czas płynie wzdłuż kierunku pionowego, a przestrzeń zmienia się wzdłuż poziomego.

Tego typu możliwość wysyłania informacji wstecz w czasie była dla nas wystarczającym powodem (o paradoksalnej zamianie emisji w absorpcję nie wspominając), by odrzucić nadświatłowe cząstki sprzed naszego zatroskanego oblicza.

A jednak coś istotnego przeoczyliśmy. Zaczniemy rozumowanie od początku. Pisząc o wysyłanym sygnale zakładamy dwie rzeczy: istnienie nadświatłowych obiektów, które mogą być emitowane i pochłaniane oraz to, że możemy ich emisję kontrolować. Nie da się przecież tworzyć sygnałów niosących redagowaną przez nas treść bez posiadania nad nimi kontroli. Założenie, że emisję nadświatłowych cząstek w pełni kontrolujemy jest szczególnie interesujące. W języku, którego używaliśmy w rozdziale 5, oznacza ono, że w linii świata nadawcy A przebiega jakiś lokalny i kontrolowalny, a zatem deterministyczny proces, który określa chwilę emisji nadświatłowej cząstki. Istnieje zatem pewien parametr ukryty (bądź jawny) λ , którym możemy sterować i którego wartość stanowi przyczynę emisji *tachionu* (jak nazywała się hipotetyczną cząstkę nadświatłową) w danej chwili. Możemy na przykład wyobrazić sobie, że A posiada pistolet strzelający tachionami. Odwrotny ciąg przyczynowo-skutkowy byłby więc następujący: tachion opuścił A, bo wystrzeliła spłonka naboju, bo nadawca nacisnął spust pistoletu. W tym przypadku parametr λ może odnosić się na przykład do reakcji chemicznej zachodzącej w wybuchającej spłonce, którą kontroluje nadawca trzymający pistolet. Zakładamy ponadto, że odległy odbiorca B nic nie wie o parametrze λ i aż do momentu zarejestrowania tachionu nie ma z nim absolutnie nic wspólnego.

Prześledźmy teraz powyższy scenariusz okiem innego obserwatora inercjalnego, którego

wersja wydarzeń znajduje się na rysunku 12.1b). Jak zauważyliśmy, w tym układzie emisja ma miejsce w zdarzeniu B, zaś A staje się absorpcją. Zastanówmy się teraz nad następującym pytaniem: co emisję B spowodowało? Spora przerwa na zastanowienie. Powód taki nie może być „zlokalizowany” w linii świata poprzedzającej zdarzenie B, bo założyliśmy, że odbiorca B nie wie nic o tym, że ma za moment zostać potraktowany tachionem wystrzelonym przez nadawcę A. Mówiąc wprost: B nie kontroluje żadnego pistoletu. Przychodzą do głowy same dziwne rzeczy. Na przykład taka, że powód emisji tachionu w zdarzeniu B znajduje się w odległym zdarzeniu A, w przyszłości. Bo tam właśnie został naciśnięty spust. Jeśli jednak chcemy opisać zdarzenie B wyłącznie teorią lokalną i deterministyczną, czyli opisującą zdarzenia jako konsekwencje przeszłości w bezpośrednim otoczeniu, to, jak widać, opis taki wydaje się niemożliwy. Praktycznie oznacza to, że jeśli w pobliżu zdarzenia B znajduje się poruszający się obserwator, krótkowidz, który widzi jedynie rzeczywistość w otoczeniu zdarzenia B z rysunku 12.1b), to jego zdaniem emisja, która tam nastąpi będzie zupełnie *spontaniczna*, czyli pozbawiona jakiejkolwiek przyczyny.

Jeśli chcemy utrzymać zasadę względności nie wyróżniając żadnego układu inercjalnego, to jeśli emisja tachionu widziana przez obserwatora z rysunku 12.1b) w zdarzeniu B była czysto spontaniczna, czyli bez deterministycznego i lokalnego parametru λ' , to musimy przyjąć, że emisja tachionu widziana przez obserwatora z rysunku 12.1a) w zdarzeniu A musi również być czysto spontaniczna. Możemy sobie na przykład wyobrazić, że dwie linie świata zawierające zdarzenia A i B opisują trajektorię dwóch identycznych obiektów. Gdyby jeden z nich mógł emitować tachion deterministycznie, a drugi nie, wprowadzałoby to rozróżnienie pomiędzy rozważanymi układami inercjalnymi. Zatem zgodnie z zasadą względności, w układzie odniesienia 12.1a) również nie mogło być żadnego lokalnego parametru λ . Widzimy, do jak dziwnych wniosków dochodzi się, gdy próbuje się wprowadzać do teorii względności realne obiekty nadświatłne. Pytanie, czy taka rzeczywistość jest z jakiegoś powodu nieakceptowalna? Przecież, o ile nam wiadomo, mechanika kwantowa od zawsze twierdziła (prowokując do wierzenia wielu słynnych fizyków, w tym Einsteina), że emisja fotonu przez atom, czy rozpad cząstki elementarnej nie są aktami deterministycznymi. W czym więc problem?

Musimy zastanowić się, czy posiadanie źródła tachionów, które emituje je spontanicznie, w losowych chwilach, nie prowadzi do możliwości nadświatłnego przesyłania informacji. Wtedy bowiem bylibyśmy w tarapatach. No cóż, żeby przesłać informację, trzeba by jakoś takie źródło kontrolować, czyli mówiąc ściśle, mieć pod kontrolą jakiś parametr λ , który

jednak w ogóle nie może istnieć, co przed chwilą pokazaliśmy. Jak więc użyć źródła tachionów do komunikacji na odległość? Moglibyśmy takie źródło przykrywać i odkrywać modulując wysyłany sygnał. Ale i taki podstęp się nie powiedzie. Dlaczego? Zauważmy, że z rysunku 12.1 wynika, że jeśli coś (w pewnym układzie odniesienia) pochłania tachiony, to (w innym układzie odniesienia) musi je również emitować. Jeśli nie chcemy wyróżniać układu odniesienia, musi oznaczać to, że każdy detektor tachionów musi je emitować. To zaś oznacza, osłona, której chcieliśmy użyć do przykrycia źródła, sama stanie się źródłem nowych tachionów. Z punktu widzenia odległego odbiorcy nie będzie więc żadnej modulacji otrzymywanego sygnału. Jak by nie było, używanie tego typu przykrywki możliwe jest w przypadku, gdy przestrzeń jest co najmniej dwuwymiarowa. Na razie jednak ograniczmy się do analizy czasoprzestrzeni $1 + 1$ wymiarowej, w której zagadnienie osłony i tak się nie pojawia. Gdy skończymy, przejdziemy do uogólnienia na bardziej realny, ale również koncepcyjnie bardziej złożony przypadek czasoprzestrzeni o wymiarze $1 + 3$.

Czy możliwe są inne próby komunikacji na odległość przy użyciu źródła tachionów? No cóż, moglibyśmy modulować sygnał tachionowy niszcząc posiadane źródło lub budując je od nowa. Wówczas komunikacja nadświatlna byłaby rzeczywiście możliwa. Oznacza to, że aby rozszerzenie teorii względności było wewnętrznie niesprzeczne, hipotetyczne źródła tachionów musiałyby być fundamentalnie niezniszczalne. Tak, jak niezniszczalna jest na przykład próżnia, która zgodnie z kwantową teorią pola nieustannie kreuje i niszczy „wirtualne” cząstki różnych rodzajów.

12.3 DRUGA TRANSFORMACJA LORENTZA

Metoda, której użyliśmy do wyprowadzenia transformacji Lorentza w rozdziale 12.1 bazuje na zasadzie względności dopuszczającej do rozważań układy inercjalne poruszające się z dowolnymi prędkościami. Okazuje się jednak, że w wyniku przeprowadzonego rozumowania otrzymaliśmy wyrażenia określone tylko dla prędkości mniejszych niż c , co w zasadzie stoi w sprzeczności z przyjętym założeniem. Argumentacja podana w rozdziale 12.2 pokazuje zaś, że absurdalność nadświatlnych obiektów w teorii względności wcale nie jest ewidentna. Przeciwnie, już na pierwszy rzut oka pokazują one coś ciekawego: prawdziwy indeterminizm tkwiący w szczególnej teorii względności. Może zatem coś w naszym wyprowadzeniu przeoczyliśmy i z nadświatelnymi obiektami również można wiązać układy inercjalne?

Okazuje się, że przeanalizowaliśmy tylko jedną gałąź rozwiązań równania (12.5), pod-

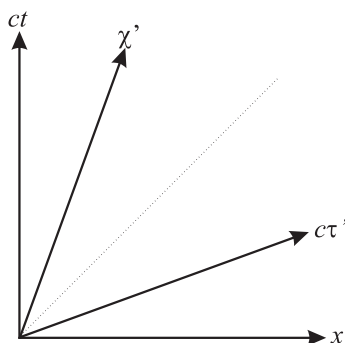
czas gdy istnieje jeszcze jedna. Rozważmy bowiem nieparzystą funkcję $A(-V) = -A(V)$. Warunek nieparzystości prowadzi do dziwacznych, na pierwszy rzut oka, konsekwencji w równaniach (12.2): przy zamianie czasu $t \mapsto -t$ w układzie spoczywającym, czas t' w układzie poruszającym się nie zmienia znaku, a odwraca się współrzędna przestrzenna $x' \mapsto -x'$. Póki co, brzmi to niedorzecznie, ale zaciśnijmy zęby i sprawdźmy mimo wszystko, do czego prowadzi. Po wstawieniu nieparzystej funkcji $A(V)$ do równania (12.5) ze stałą $K = \frac{1}{c^2}$ otrzymujemy rozwiązanie $A(W) = \pm \frac{W/|W|}{\sqrt{W^2/c^2 - 1}}$, które jest określone tylko dla prędkości $W > c$. Dodatkowy czynnik $\pm W/|W|$ jest jedyną antysymetryczną funkcją unimodularną (o module równym jeden), natomiast znak $A(W)$ nie jest możliwy do dookreślenia jak poprzednio, gdyż nie istnieje przejście graniczne $W \rightarrow 0$. Ostatecznie dostajemy zatem z równań (12.2):

$$\begin{aligned}\chi' &= \pm \frac{W}{|W|} \frac{x - Wt}{\sqrt{W^2/c^2 - 1}} \\ \tau' &= \pm \frac{W}{|W|} \frac{t - Wx/c^2}{\sqrt{W^2/c^2 - 1}},\end{aligned}\tag{12.7}$$

gdzie greckimi literami oznaczamy współrzędne w nadświatlnym układzie odniesienia, poruszającym się z prędkością W : χ' jest współrzędną przestrzenną, a τ' czasową. Określenie, która współrzędna jest czasowa, a która przestrzenna może być dokonane na podstawie zasady, że linia świata obserwatora powinna pokrywać się z osią czasu układu współporuszającego się z nim. Graficzna interpretacja transformacji (12.7) jest zresztą bardzo czytelna. Dla podświatlnej transformacji Lorentza osie układu poruszającego były nachylone do osi układu spoczywającego pod kątem nieprzekraczającym $\frac{\pi}{4}$, jak pokazaliśmy to na rysunku 1.3, podczas gdy dla transformacji nadświatlnej (12.7) kąt ten przekracza $\frac{\pi}{4}$, jak na rysunku 12.2.

Jako przykład rozważmy układ inercjalny obserwatora poruszającego się z nieskończoną prędkością. Wybierając dodatni znak w równaniach (12.7) dostajemy wówczas:

$$\begin{aligned}\chi &= ct \\ c\tau &= x.\end{aligned}\tag{12.8}$$



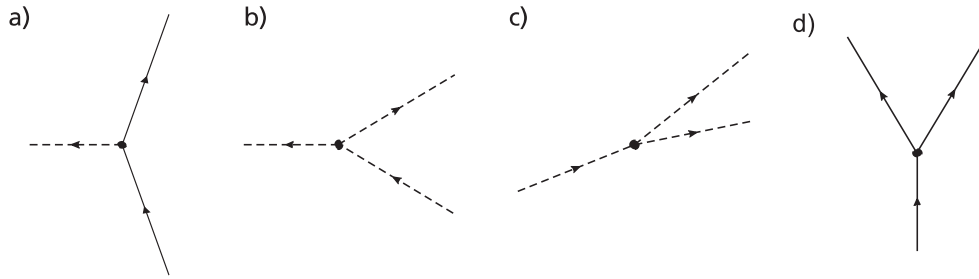
Rysunek 12.2: Osie czasoprzestrzenne dwóch układów inercjalnych poruszających się względem siebie z nadświatłą prędkością.

Zatem obserwator ten doświadcza „naszego” wymiaru czasowego jako jego przestrzennego i *vice versa*. Rezultat ten uzasadnia nareszcie dziwny warunek nieparzystości współczynnika $A(W)$, który rozważyliśmy. Nie powinno nas już dziwić, że operacja odwrócenia upływu czasu $t \mapsto -t$ w układzie podświatłym odpowiada odbiciu przestrzeni $\chi \mapsto -\chi$, a nie czasu $\tau \mapsto -\tau$ (jak byłoby dla ruchów podświatłych) w układzie poruszającym się z nadświatłą prędkością.

12.4 W PROCH SIĘ SPONTANICZNIE OBRÓCISZ

W czasoprzestrzeni o wymiarze $1 + 1$ rzeczywistość obserwatorów podświatłych nie wydaje się specjalnie różnić od rzeczywistości obserwatorów nadświatłych. Różnica pomiędzy nimi sprowadza się do zamiany rolami czasu i przestrzeni. Mówiąc skrótowo, w takim scenariuszu nawet gdybyśmy byli tachionami, prawdopodobnie nic byśmy o tym nie wiedzieli. Przyjmijmy więc konsekwentnie, że zasada względności obowiązuje wszystkich, również nadświatłych, obserwatorów żyjących w czasoprzestrzeni o wymiarze $1 + 1$.

Odkryliśmy też, że gdyby tachiony były łaskawe istnieć, to rozpady zwykłych cząstek z ich udziałem, musiałyby mieć charakter spontaniczny. Czy zatem nie wydaje się dziwne, że rozpady zwykłych, podświatłych cząstek mogą być w takiej teorii w pełni deterministyczne? A może wcale nie mogą? Nie ulega wątpliwości, że warto się przekonać. W rozdziale 12.2 pokazaliśmy, że proces emisji tachionu przez cząstkę masową, pokazany na rysunku 12.3a), nie może być opisany przy pomocy lokalnej i deterministycznej teorii. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla procesu przedstawionego na rysunku 12.3b).



Rysunek 12.3: Emisja tachionu przez: a) cząstkę masywną, b) inny tachion, c) proces b) widziany przez innego obserwatora; d) rozpad cząstki masywnej na parę cząstek masywnych.

W tym celu najlepiej przeanalizować ów proces z punktu widzenia alternatywnego, podświetlnego obserwatora inercyjnego, którego punkt widzenia przedstawia rysunek 12.3c). Możemy sobie na przykład wyobrazić, że dwie dolne tachionowe linie świata łączą się z liniami świata dwóch masywnych cząstek, które pierwotnie nic o sobie nawzajem nie wiedziały. Powtarzając następnie rozumowanie z rozdziału 12.2 dostaniemy znów wniosek, że nic nie określa chwili oddzielenia się linii świata tachionu od linii świata masywnej cząstki. Jeśli ponadto przyjmniemy, że parametr określający chwilę rozpadu tachionu na dwa inne tachiony nie może „brać się znikąd”, to dojdziemy do wniosku, że parametr ten również nie może istnieć (bo nie mógł mieć swojego źródła w procesach zachodzących w masywnej cząstce, od której pochodzi).

Zatem także w przypadku rozpadu tachionu na parę innych tachionów, nie jest możliwe związanie z którąkolwiek linią świata jakiegokolwiek lokalnego parametru ukrytego determinującego chwilę rozpadu. Jednakże wzory transformacyjne (12.8) dowodzą, że diagram 12.3b) pokazuje, w jaki sposób proces rozpadu spoczywającej, masywnej cząstki na dwie inne 12.3d), wygląda z perspektywy obserwatora poruszającego się z nieskończoną prędkością. Z zasady względności wnioskujemy więc, że skoro według nadświetlnego obserwatora proces rozpadu 12.3b) nie jest rządzoney żadnym lokalnym i deterministycznym procesem, to również w układzie podświetlnym ten sam proces widziany jako 12.3d) musi być spontaniczny. A zatem wszystkie procesy rozpadu muszą być spontaniczne.

Wnioski z powyższego rozumowania zgadzają się co prawda z naszą wiedzą na temat rozpadów cząstek elementarnych, ale wydają się przeczyć codziennemu doświadczeniu ze świata makroskopowego. Rozważmy na przykład bombę, która wybucha rozpadając się na kilka kawałków w dobrze określonej, możliwej do kontrolowania, a zatem i przewidzenia

chwili. Czy istnienie granatów z zawleczką nie przeczy wnioskowi, które właśnie wyciągnęliśmy? Zgodnie z nimi, akt rozpadu jest zdarzeniem bezprzyczynowym, zatem różne cząstki będą w ogólności rozpadać się w różnych chwilach czasu, a statystyka chwil rozpadu może być ujęta pewną gęstością prawdopodobieństwa ϱ rozpadu na jednostkę czasu własnego. Jeśli gęstość ϱ jest zawsze dodatnia, prawdopodobieństwo rozpadu będzie stale wzrastało. Na przykład dla gęstości ϱ niezmienniej w czasie, prawdopodobieństwo rozpadu będzie wykładniczo dążyć do jedności z pewnym czasem charakterystycznym, którego wartość zależy w ogólności od rodzaju rozpadu. Czas ten (równy ϱ^{-1}) nie może być wyrażony jakąkolwiek kombinacją dostępnych stałych, takich jak masa cząstki m , czy prędkość c . Nie pozwala na to ich wymiar. Zatem sam fakt istnienia rozpadów implikuje konieczność wyróżnienia pewnej nowej, fundamentalnej stałej charakteryzującej czas lub przestrzeń. Stała ta może mieć też dowolny inny wymiar, byle tylko przy użyciu dostępnych wielkości (masy i prędkości światła) można ją było przekształcić w wielkość o wymiarze sekundy. Z przyczyn, nazwijmy to, historycznych przyjmujemy, że stała ta ma wymiar jednostek momentu pędu i oznaczmy ją symbolem $\hbar$:

$$[\varrho] = \left[\frac{\mu c^2}{\hbar} \right]. \quad (12.9)$$

Istnieje już, co prawda, jedna znana nam stała fizyczna, której wymiar pozwala odcedzić wymiar czasu – stała grawitacji Newtona G , jednak w płaskiej czasoprzestrzeni nie odgrywa ona raczej żadnej istotnej roli.

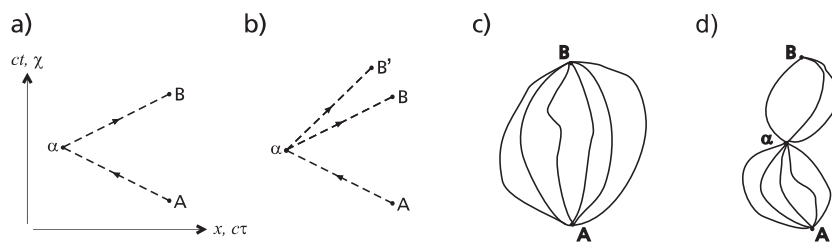
Zatem spontaniczne procesy rozpadu zachodzą w pewnych wyróżnionych skalach czasowych, typowych dla danego procesu. Okazuje się, że skale te są, w większości przypadków, o wiele krótsze od czasów charakterystycznych dla naszego makroskopowego świata. Jeśli więc rozważana przez nas bomba wybucha na skutek wymieszania ze sobą dwóch substancji chemicznych, to możemy sobie wyobrazić, że reakcja chemiczna będąca źródłem energii wybuchu zachodzi, na odpowiednio krótkiej skali pomiędzy pojedynczymi cząsteczkami mieszanych substancji jedynie z pewnym prawdopodobieństwem i spontanicznie. Jeśli jednak odczekamy odpowiednio długo, przechodząc do makroskopowej skali czasowej, to prawdopodobieństwo zajścia reakcji pomiędzy dowolnymi dwoma cząsteczkami tych substancji wynosi prawie jeden. Zatem chwila wybuchu jest w naszej skali dobrze określona i możliwa do przewidzenia, choć wiemy, że jest to jedynie przybliżenie, bo na odpowiednio krótkich skalach czasu reakcja chemiczna zachodzi spontanicznie.

Gdybyśmy jednak w konstrukcji zapalnika bomby posłużyli się procesem, którego skala czasowa nie jest o wiele krótsza od dostępnej nam skali makroskopowej, to bomba mogłaby rzeczywiście wybuchnąć w sposób spontaniczny i nie dający się kontrolować. Bombę taką można zbudować, wystarczy w tym celu jako zapalnika użyć rozpadającego się neutronu, którego średni czas życia wynosi około 12 minut. Tak skonstruowana bomba, zgodnie z doktryną mechaniki kwantowej (a także rozszerzoną zasadą względności), wybuchnie w chwili fundamentalnie nieprzewidywalnej.

12.5 SUPERPOZYCJA LINII ŚWIATA

Wszystkie nieomal prawa fizyki klasycznej opierają się na jednym podstawowym prawie: rzeczywistość rządzi się pewnymi prawami, jest w pełni deterministyczna. Dopiero mechanika kwantowa wprowadza rozgardiasz w tym idyllicznym obrazie świata. Jednym z jej podstawowych postulatów jest fundamentalna nieokreśloność wyników pomiarów. W naszej analizie odkryliśmy właśnie coś zaskakującego – szczególna teoria względności obejmująca wszystkich, również nadświatlnych obserwatorów, też posiada mechanizm fundamentalnej nieokreśloności pewnych zjawisk – nie trzeba go nawet postulować, można go elementarnie wydedukować. Rozszerzonej teorii względności po prostu nie da się stworzyć w wariancie deterministycznym w sposób niesprzeczny. Czy to nie dziwne, że teoria względności, jak i mechanika kwantowa, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego, posiadają w swym opisie ten sam intrygujący efekt? Przypomnijmy, że w rozdziale 5 zauważyliśmy już, jak zadziwiająco sprytnie kwantowe zjawisko EPR unika konfliktu ze szczególną teorią względności. Podobnych „zbiegów okoliczności” jest zresztą dużo więcej. Czy to nie podejrzané? A może rozszerzona teoria względności posiada też inne własności, które postulowane są w teorii kwantowej?

Rozważmy układ odniesienia (ct, x) , w którym cząstka rozpoczyna swój bieg w zdarzeniu A poruszając się do zdarzenia α , w którym zmienia swoją prędkość i ostatecznie dociera do B – rysunek 12.4a). Rozważana cząstka przebywa najpierw trajektorię $A\alpha$, a następnie trajektorię αB . Jeśli zatem na obu tych odcinkach linii świata umieszczone zostaną dwa detektory, które pochłaniają cząstkę badając jej położenie, to jeśli cząstka zostanie wykryta w pierwszym detektorze na odcinku $A\alpha$, wówczas drugi detektor znajdujący się gdzieś na trajektorii αB na pewno jej nie wykryje. Podobnie, gdyby okazało się, że drugi detektor zarejestrował cząstkę, to z całą pewnością nie mogła ona być wykryta w pierwszym



Rysunek 12.4: Diagramy czasoprzestrzenne przedstawiające: a) ruch cząstki obserwowany z dwóch inercjalnych układów odniesienia: spoczywającego (ct, x) i poruszającego się nieskończenie szybko $(c\tau, \chi)$, w którym ruch interpretowany jest jako superpozycja dwóch linii świata; b) cząstka wyemitowana w A, w punkcie α przekształca się w superpozycję, co w układzie poruszającym się nieskończenie szybko interpretowane jest jako superpozycja trzech linii świata; c) wiele nieprzecinających się linii świata opisujących ruch cząstki pomiędzy zdarzeniami A i B; d) superpozycja trajektorii łączących A z B i przecinających się w pojedynczym zdarzeniu α .

detektorze.

Rozważmy teraz ten sam scenariusz z punktu widzenia obserwatora $(c\tau, \chi)$, który porusza się nieskończenie szybko. Jego interpretacja będzie zgoła odmienna, bowiem w tym układzie w punkcie α znajduje się źródło, z którego wyruszają dwie cząstki: jedna w kierunku A, druga w kierunku B. Jeśli jednak na obydwu odcinkach znajdują się detektory pochłaniająca cząstkę, wówczas rejestrować ją będzie najwyżej jeden z nich, nigdy dwa. Jest to oczywiście konsekwencja przyjętej przez nas zasady względności. Jednakże nie jest to sytuacja typowa dla dwóch cząstek, prawda? Wygląda to raczej tak, jakby w tym układzie pojedyncza cząstka poruszała się wzdłuż dwóch alternatywnych torów jednocześnie, ale pomiar zmuszał ją do „zdecydowania się”, gdzie ma zostać wykryta. Sytuację, gdy pojedynczej cząstce musimy przypisać dwie linie świata nazywamy *superpozycją* – z pojęciem tym zetknęliśmy się już w rozdziale 5 badając zachowanie pojedynczego fotonu w interferometrze Macha-Zehndera.

Rozumowanie, które przedstawiliśmy powyżej odnosi się do ruchu jednej i tej samej cząstki wzdłuż toru $A\alpha$ oraz αB . Zamiast tego moglibyśmy rozważać sytuację, w której pewna cząstka porusza się z A do α , gdzie zostaje pochłonięta, a w jej miejsce wyemitowana jest druga cząstka w kierunku B. Byłby to całkiem inny scenariusz, w którym nic nie stałoby na przeszkodzie, żeby klikały obydwa detektory. Wówczas w układzie nadświatłowym nie mielibyśmy do czynienia z superpozycją, lecz z jednoczesnym ruchem dwóch niezależnych cząstek.

CIĄG DALSZY NASTĄPI...

Pytania

Zadania

Bibliografia

- [1] L. D. Landau i E. M. Lifszyc, *Teoria Pola* (PWN, Warszawa 1958).
- [2] W. Rindler, *Length Contraction Paradox*, Amer. J. Phys. **29**, 365 (1961).
- [3] R. P. Feynman, *Elementary Particles and the Laws of Physics* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- [4] A. Nowojewski, J. Kallas i A. Dragan, *On the appearance of moving bodies*, Amer. Math. Month. **111**, 817 (2004); A. Nowojewski, J. Kallas i A. Dragan, *O wyglądzie ciał w ruchu*, Delta (2003).
- [5] M. L. Boas, *Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds*, Amer. J. Phys. **5**, 283 (1961).
- [6] G. D. Scott i H. J. Van Driel, *Geometrical Appearances at Relativistic Speeds*, Amer. J. Phys. **38**, 971 (1970).
- [7] R. P. Feynman, *Feynmana wykłady z fizyki* (PWN, Warszawa 2001), tom II.
- [8] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Dover Publications, New York 1958).
- [9] R. Peierls, *Niespodzianki w fizyce teoretycznej* (PWN, Warszawa 1990).
- [10] P. Frank i H. Rothe, *Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme*, Ann. der Phys. **34**, 825 (1911); A. Szymacha, *Przestrzeń i ruch* (Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1997).

Indeks

Bella

 nierówność, 79

 paradoks, 119

cechowanie, 172

czarna dziura, 158

czas

 retardowany, 165

 własny, 37

 własny, lokalny, 129, 143, 147

 współrzędnościowy, 126

czasoprzestrzeń, 14

 zakrzywiona, 142

czterowektor, 97

 czasowy, 110

 czterogradient, 169

 czteropęd, 104

 czteropłożenie, 98

 czteropotencjał, 172

 czteroprąd, 171

 czteropędność, 100

 czteroprzyspieszenie, 114

 czterosiła, 109

 przestrzenny, 110

 zerowy, 110

Dopplera efekt, 83, 84, 86, 90, 109

dylatacja

 czasu, 39

dylatacja czasu, 27, 36, 134

Einsteina

 konwencja sumacyjna, 99

 równania, 151

 zasada równoważności, 150

Einsteina-Podolskiego-Rosena paradoks, 74,
 75

energia

 cząstki swobodnej, 104, 105, 133, 145,
 146, 156

 spoczynkowa, 105

euklidesowa przestrzeń, 142

foton, 72, 104

Galileusza transformacja, 13, 190

horyzont zdarzeń

 czarnej dziury, 158

 obserwatora przyspieszonego, 119, 122

indeterminizm, 73

interwał, 20, 133, 142, 143, 148

 czasowy, 20

 przestrzenny, 20

 zerowy, 21

lagrangian, 147

- largangian, 147
- Larmora wzór, 182
- Liénarda-Wiecherta potencjały, 167
 - ładunku jednostajnie przyspieszanego, 180
 - ładunku o stałej prędkości, 168
- linia świata, 18
- Lorentza
 - cechowanie, 172
 - siła, 33
 - skrócenie, 27, 29–31, 34, 35, 63, 65, 67, 68, 119, 130, 134, 153
 - transformacja, 13–15, 190
 - nadświatlna, 194
- Macha-Zehndera interferometr, 71, 199
- masa
 - relatywistyczna, 106
 - spoczynkowa, 106
- Maxwella
 - równania, 109
- Maxwella równania, 163
- metryka
 - czasoprzestrzeni, 142
 - Minkowskiego, 98, 142
 - przestrzeni, 142
 - statyczna, 145, 148
- Newtona
 - II prawo, 36, 108, 177
 - III prawo, 108, 178
 - prawo grawitacji, 154, 157
 - stała grawitacji, 157, 197
- Noether twierdzenie, 178
- osobliwość, 158
- pęd cząstki swobodnej, 104
- parametr ukryty, 73, 191
- pole przyspieszeń, 154
- postulat zegara, 37, 115, 120, 145, 149
- Poyntinga
 - wektor, 109, 173
- prędkość
 - światła, 17, 164
 - lokalna, 130, 144, 145
 - ucieczki, 157
 - współrzędnościowa, 129
 - względna, 17
- rachunek wariacyjny, 147
- Rindlera transformacja, 126
- Schwarzschilda
 - metryka, 157
 - promień, 157–159
- siła, 108
 - geometryczna, 150
 - gravitacji, 150
- stożek przyszłości, 16
- strumień pola, 154
- superpozycja, 73, 199
- tachion, 191
- Thomasa precesja, 57
- Thomasa-Wignera obrót, 54
- współmienniczość, 100
- zasada
 - najmniejszego działania, 148
 - termodynamiki, II, 159

wariacyjna, 147

względności (demokracji), 21