

Indukcja matematyczna

Stefan Sokołowski

Elbląg, 2 III 2025

Zadanie 1:

Udowodnić przez indukcję, że

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Przypadek bazowy: $n = 0$.

Rozpatrujemy osobno lewą i prawą stronę (1) dla przypadku, gdy $n = 0$:

$$\begin{aligned} L &= 0 \\ P &= \frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0 \end{aligned}$$

więc $L = P$, co kończy dowód dla tego przypadku.

Krok indukcyjny:

Zakładamy, że dla pewnego n zachodzi

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (2)$$

i próbujemy udowodnić

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad (3)$$

W tym celu przekształcamy lewą stronę (3):

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k(k+1) \right) + (n+1)(n+2) \quad (\text{na mocy (2)}) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\ &= P \end{aligned}$$

Ponieważ udało się wyprowadzić tezę indukcyjną (3) z założenia indukcyjnego (2), dowód kroku indukcyjnego jest zakończony.

Na mocy twierdzenia o indukcji, to kończy dowód równości.

Zadanie 2:

Udowodnić równość

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Zadanie 3:

Udowodnić równość

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

Zadanie 4:

Udowodnić równość

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

Zadanie 5:

Udowodnić podzielność

$$7 \mid 11^n - 4^n$$

Uwaga:

Notacja $p \mid q$ oznacza: p jest dzielnikiem q ; inaczej: q dzieli się przez p z zerową resztą.

Zadanie 6:

Udowodnić podzielność

$$17 \mid 3^{4n} - 4^{3n}$$

Zadanie 7:

Udowodnić przez indukcję, że

$$2^n > n^2 \quad \text{dla } n \geq 5 \tag{4}$$

Uwaga:

To zadanie dotyczy porównania szybkości wzrostu dwóch funkcji — wielomianowej oraz wykładniczej. Takie funkcje służą m.in. do mierzenia czasu wykonania algorytmów. Por. np.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Złożoność_obliczeniowa

Zadanie 8 (domowe specjalne):

Udowodnić **nierówność**

$$(a + b)^n \geq a^n + b^n \quad \text{dla dowolnych } a, b \geq 0 \text{ oraz } n \geq 1$$

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przysła mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.
