

Matematyka dyskretna — ćwiczenia 2

Indukcja matematyczna, c.d.

Stefan Sokołowski

Elbląg, 8 III 2025

Zadanie 0:

Udowodnić przez indukcję, że

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{dla } n \geq 0$$

Zadanie 1:

Udowodnić przez indukcję, że

$$11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2(n+1)} \quad \text{dla } n \geq 0$$

Zadanie 2:

Udowodnić nierówność Bernoulliego:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{dla } n \geq 0 \text{ i } x > -1$$

Uwaga: $x \in \mathbb{R}$ — liczba rzeczywista.

Zadanie 3:

Udowodnić, że jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest ciągiem

- **arytmetycznym**, to jego suma wynosi $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$
- **geometrycznym** o ilorazie q , to jego suma wynosi

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} a_1 \cdot n & \text{jeśli } q = 1 \\ a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{jeśli } q \neq 1 \end{cases}$$

Zadanie 4:

Udowodnić, że dla $n \geq 2$ ostatnia cyfrą liczby 2^{2^n} jest 6.

Zadanie 5:

Udowodnić, że średnia geometryczna ciągu rzeczywistych liczb dodatnich nigdy nie przekracza ich średniej arytmetycznej:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

Wskazówka:

$\prod$ oznacza iloczyn ciągu liczb.

Zadanie 6:

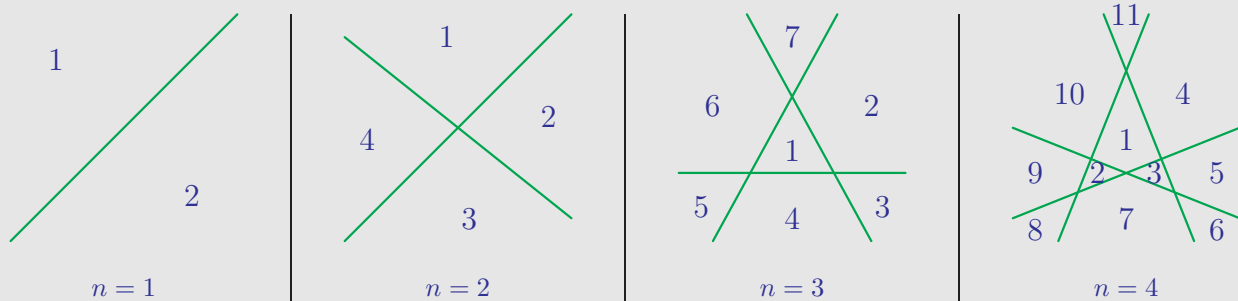
Na płaszczyźnie narysowano n prostych w taki sposób, że

1. żadne dwie nie są równoległe,
2. żadne trzy nie przecinają się w tym samym punkcie.

Na ile obszarów te proste dzielą płaszczyznę?

Wskazówka:

Poniższy rysunek pokazuje liczby obszarów dla kilku niewielkich wartości n :



Należy zgadnąć wzór na liczbę obszarów dla n prostych, a następnie zgadnięty wzór udowodnić przez indukcję.

Zadanie 7 (domowe specjalne):

Funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ma następujące własności:

- $f(a, 0) = 1$ dla $a \in \mathbb{R}$,
- jeśli $n > 0$ jest parzyste, to $f(a, n) = f(a \cdot a, n/2)$ dla $a \in \mathbb{R}$,
- jeśli $n > 0$ jest nieparzyste, to $f(a, n) = a \cdot f(a, n-1)$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Udowodnić, że $f(a, n) = a^n$ dla dowolnego rzeczywistego $a \in \mathbb{R}$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

To zadanie uzasadnia poprawność poniższej funkcji w C realizującej szybki algorytm potęgowania:

```
double pot(double x, int n) {  
    double w=1.0;  
    while (n>0)  
        if (n%2 == 0) { // n jest parzyste  
            x = x*x;  n = n/2;  
        } else { // n jest nieparzyste  
            w = w*x;  n = n-1;  
        }  
    return w;  
}
```

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.
