

Rekurencje

Stefan Sokołowski

Elbląg, 16 III 2025

Zadanie 1:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ a_{n-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}} + 1 & \text{dla } n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Rozwiązanie:

Wypiszmy kilka kolejnych wartości ciągu a_n na podstawie definicji (1):

$n =$	obliczenie a_n	wartość a_n
0		0
1	$0 + 3 \cdot \sqrt[3]{0^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{0} + 1$	1
2	$1 + 3 \cdot \sqrt[3]{1^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{1} + 1$	8
3	$8 + 3 \cdot \sqrt[3]{8^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{8} + 1$	27
4	$27 + 3 \cdot \sqrt[3]{27^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{27} + 1$	64
...	...	...

Nasuwa się podejrzenie, że

$$a_n = n^3 \quad (2)$$

Spróbujmy potwierdzić to podejrzenie przez indukcję.

Przypadek bazowy: $n=0$.

Wtedy teza (2) sprowadza się do

$$a_0 \stackrel{?}{=} 0^3$$

a to wynika bezpośrednio z definicji (1):

$$L = a_0 = 0 = 0^3 = P$$

Krok indukcyjny:

Założmy, że dla pewnego n zachodzi

$$a_n = n^3 \tag{3}$$

i spróbujmy udowodnić

$$a_{n+1} \stackrel{?}{=} (n+1)^3 \tag{4}$$

dla tego samego n .

Przekształćmy lewą stronę tezy indukcyjnej (4):

$$\begin{aligned} L &= a_{n+1} && \text{(z definicji (1))} \\ &= a_n + 3 \cdot \sqrt[3]{a_n^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_n} + 1 && \text{(z zał.ind. (3))} \\ &= n^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{(n^3)^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{n^3} + 1 \\ &= n^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{(n^2)^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{n^3} + 1 \\ &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ &= (n+1)^3 \\ &= P \end{aligned}$$

Ponieważ udało się wyprowadzić tezę indukcyjną (4) z założenia indukcyjnego (3), dowód kroku indukcyjnego jest zakończony.

Na mocy twierdzenia o indukcji, to kończy dowód równości (2).

Zadanie 2:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

Rozwiązać tą rekurencję, czyli podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 3:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 3 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 4 (domowe na punkty):

Podać wzór na n -ty wyraz ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots$ takiego, że

- $a_0 = 1$ i $a_2 = -4$, oraz
- każdy wyraz oprócz zerowego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedzającego i następującego, czyli

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wskazówka: proszę nie bać się liczb zespolonych.

Uwaga:

Czas na przysyłanie (na s.sokolowski@ans-elblag.pl): 2 tygodnie od zajęć z lab.3 — potem już nie przyjmuję rozwiązań. Liczba punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.

Zadanie 5:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 0.5 & \text{dla } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{n^2 - 2}{n(n-1)(n-2)} - 1 & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Proszę zwrócić uwagę, że rekursja jest tu głębsza: sięga od n aż do $n-2$.

Zadanie 6:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 3 & \text{dla } n = 1 \\ 9 & \text{dla } n = 2 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} + \frac{4a_{n-2}^2}{3a_{n-3}} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Proszę zwrócić uwagę, że tu rekursja jest jeszcze głębsza: od n aż do $n-3$.
