

Matematyka dyskretna — ćwiczenia 4

Rekurencje liniowe jednorodne

Stefan Sokołowski

Elbląg, 20 III 2025

Zadanie 1:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -4 & \text{dla } n = 2 \\ -3a_{n-1} + 4a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Rozwiązanie:

Na razie zajmujemy się tylko przypadkiem rekursywnym, czyli dla $n \geq 3$. Wielomian charakterystyczny tej rekurencji jednorodnej ma postać

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2$$

a więc ma pierwiastki:

- jednokrotny: 1; oraz
- dwukrotny: -2.

Wobec tego rozwiązanie rekurencji ma postać:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot 1^n + s \cdot (-2)^n + t \cdot n \cdot (-2)^n \quad (2)$$

dla pewnych liczb $r, s, t \in \mathbb{R}$; które trzeba jeszcze ustalić.

W (2) podstawmy za n kolejno 0, 1 i 2; otrzymamy następujący układ równości:

$$\begin{aligned} a_0 = 1 &= r \cdot 1^0 + s \cdot (-2)^0 + t \cdot 0 \cdot (-2)^0 \\ a_1 = 0 &= r \cdot 1^1 + s \cdot (-2)^1 + t \cdot 1 \cdot (-2)^1 \\ a_2 = -4 &= r \cdot 1^2 + s \cdot (-2)^2 + t \cdot 2 \cdot (-2)^2 \end{aligned}$$

co daje układ równań liniowych z niewiadomymi r, s i t :

$$\begin{aligned} r + s &= 1 \\ r - 2s - 2t &= 0 \\ r + 4s + 8t &= -4 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu jest

$$\begin{aligned}r &= 0 \\s &= 1 \\t &= -1\end{aligned}$$

co po podstawieniu do (2) daje

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} (1-n) \cdot (-2)^n$$

jako rozwiązanie (1).

Zadanie 2:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 3 & \text{dla } n = 1 \\ -3a_{n-1} - 2a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 3:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -6a_{n-1} - 9a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 4:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 8a_{n-1} - 16a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 5:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 2 & \text{dla } n = 1 \\ -4a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Wskazówka:

Nie przestraszyć się zespolonych pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

Zadanie 6 (domowe specjalne):

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 4 & \text{dla } n = 2 \\ 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.
