

Podzielność i algorytm Euklidesa

Stefan Sokołowski

Elbląg, 3 IV 2025

TWIERDZENIE: (jednoznaczność dzielenia)

Niech $dzielna, dzielnik \in \mathbb{Z}$ i $dzielnik > 0$. Wtedy istnieje dokładnie jedna para liczb $iloraz, reszta \in \mathbb{Z}$ taka że

$$dzielna = dzielnik \cdot iloraz + reszta \quad \text{oraz} \quad 0 \leq reszta < dzielnik$$

$iloraz$ — chodzi oczywiście o iloraz całkowity

Oznaczenie:

$$iloraz = dzielna / dzielnik$$

$$reszta = dzielna \bmod dzielnik$$

Przykład:

$$\begin{array}{ll} 7 / 3 = 2 & 7 \bmod 3 = 1 \\ -7 / 3 = -3 & -7 \bmod 3 = 2 \end{array}$$

Definicja: (podzielność)

Niech $n, k \in \mathbb{Z}$ i $k > 0$. Powiemy że n jest podzielne przez k jeśli $n \bmod k = 0$.

Oznaczenie:

$$k \mid n \iff n \text{ jest podzielne przez } k \iff n \text{ dzieli się przez } k \iff k \text{ jest dzielnikiem } n$$

$$k \nmid n \iff n \text{ nie jest podzielne przez } k$$

Zadanie 1:

Wykazać, że $24 \mid n(n^2 - 1)$ dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n .

Rozwiązanie:

$$n(n^2 - 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$$

Więc $n(-1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, któraś z nich musi być podzielna przez 3 i dlatego $3 \mid n(n^2 - 1)$.

Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, więc $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Dlatego

$$n(n^2 - 1) = (2k + 1)((2k + 1)^2 - 1) = (2k + 1)(4k^2 + 4k) = (2k + 1) \cdot 4k(k + 1)$$

Ponieważ $k(k+1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych, któraś z nich musi być parzysta, więc $2 \mid k(k+1)$; wobec tego $8 \mid 4 \cdot k(k+1)$; wobec tego $8 \mid n(n^2-1)$.

Skoro $n(n^2-1)$ dzieli się zarówno przez 3 jak przez 8, to dzieli się przez 24.

Zadanie 2:

Wykazać, że liczba 9870456432 nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Wskazówka:

Przebadać ostatnie cyfry (czyli reszty z dzielenia przez 10) kwadratów kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 3:

Wykazać, że dla dowolnej naturalnej liczby n , albo $4 \mid n^2$ albo $4 \mid n^2 - 1$.

Zadanie 4:

Przy pomocy algorytmu Euklidesa znaleźć największy wspólny dzielnik liczb

- 4515 i 1176;
 - 8820 i 945;
 - 16 714 i 793.
-

Zadanie 5:

Największy wspólny dzielnik podanych niżej par liczb wyrazić jako ich całkowitoliczbową kombinację liniową:

- 1200 i 372;
 - 8820 i 945;
 - 15 391 i 1731.
-

Zadanie 6 (domowe specjalne):

Załóżmy, że liczby całkowite p i q są względnie pierwsze (czyli nie mają żadnego wspólnego dzielnika większego od 1); i że n jest jakąś liczbą całkowitą. Proszę udowodnić, że wtedy **dokładnie jedna** liczba spośród

$$\begin{cases} n + 0 \cdot q \\ n + 1 \cdot q \\ \vdots \\ n + (p-1) \cdot q \end{cases}$$

jest podzielna przez p .

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium/ćwiczeń. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania. W mailu proszę koniecznie podać swoje **nazwisko, numer zajęć i numer zadania**.
