

Matematyka dyskretna — ćwiczenia 7

Równania diofantyczne

Stefan Sokołowski

Elbląg, 27 IV 2025



Diophantos z Aleksandrii



tłum. łacińskie z XVII wieku

Zadanie 1:

Znaleźć wszystkie całkowite rozwiązania równań:

(a) $260x + 144y = 10$

(b) $260x + 144y = 8$

Rozwiązanie:

Ponieważ $\text{nwd}(260, 144) = 4$ i $4 \nmid 10$, więc równanie (a) **nie ma** rozwiązania całkowitego.

Ponieważ $\text{nwd}(260, 144) = 4$ i $4 \mid 8$, więc równanie (b) **ma** rozwiązania całkowite.

Znajdźmy jedno rozwiązanie równania **niejednorodnego**

$$260 \cdot x + 144 \cdot y = 8 \quad (1)$$

Korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa wyrażamy największy wspólny dzielnik współczynników jako ich kombinację liniową:

$$260 \cdot 5 + 144 \cdot (-9) = \text{nwd}(260, 144) = 4$$

i po pomnożeniu obu stron przez 2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 260 \cdot (5 \cdot 2) + 144 \cdot (-9 \cdot 2) &= 4 \cdot 2 \quad \text{czyli} \\ 260 \cdot \mathbf{10} + 144 \cdot \mathbf{(-18)} &= 8 \end{aligned}$$

Jedno rozwiązanie równania **jednorodnego**

$$260 \cdot x + 144 \cdot y = 0 \quad (2)$$

otrzymamy przez „skrzyżowanie współczynników”:

$$260 \cdot (-144) + 144 \cdot 260 = 0$$

(przy jednym z nich należy zmienić znak); wobec tego rozwiązaniem jest $\begin{cases} x = -144 \\ y = 260 \end{cases}$. Rozwiązanie ogólne (2) otrzymamy przez podzielenie przez największy wspólny dzielnik i uwzględnienie wszystkich całkowitych wielokrotności:

$$\begin{cases} x = (-144/4) \cdot t \\ y = (260/4) \cdot t \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = -36 \cdot t \\ y = 65 \cdot t \end{cases}$$

Rozwiązaniem **ogólnym** równania **niejednorodnego** jest suma rozwiązania *szczególnego równania niejednorodnego* oraz rozwiązania *ogólnego równania jednorodnego*:

$$\begin{cases} x = 10 - 36t \\ y = -18 + 65t \end{cases}$$

Zadanie 2:

Rozwiązać (w liczbach całkowitych) następujące równania z dwiema niewiadomymi:

(a) $140x - 63y = 35$

(b) $154x + 260y = 4$

(c) $154x + 260y = 24$

(d) $7684x + 414y = 272$

(e) $516x + 564y = 6432$

(f) $17368x + 5470y = 80$

Zadanie 3 (domowe specjalne):

Znaleźć wszystkie całkowitoliczbowe rozwiązania równania

$$30x + 54y + 45z = 9$$

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium/ćwiczeń. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania. W mailu proszę koniecznie podać swoje **nazwisko, numer zajęć i numer zadania**.
