

Symbole Newtona i kombinatoryka

Stefan Sokołowski

Elbląg, 24 V 2025

Zadanie 1:

Przyjmujemy za definicję symbolu Newtona:

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

dla $n \geq k \geq 0$. Udowodnić, że

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{dla } n > k > 0$$

$$(b) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$(d) \quad \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Zadanie 2:

Wyznaczyć liczbę takich podzbiorów X zbioru $L_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, że

- (a) X zawiera dokładnie 3 liczby parzyste;
 - (b) X zawiera nie więcej niż 3 liczby parzyste;
 - (c) X zawiera więcej niż 3 liczby parzyste.
-

Takie drogi mają oczywiście długość $n+k$ i muszą iść tylko w górę i w prawo; nie mogą się cofać.

Ile jest

- $$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad ?$$

- (b) rozkładów n kul w $k + 1$ pudełkach?

Wskazówka: skorzystać z rozwiązania zad. 3.

Na ile sposobów można włożyć

- 20 identycznych kul do 4 pudełek?
- 20 identycznych listów do 10 skrzynek tak, żeby w każdej znalazł się przynajmniej jeden list?
- 20 identycznych kul do 4 pudełek tak, żeby w każdym znalazły się co najmniej 3 kule?

Na ile sposobów można rozsadzić k osób na n krzesłach, żeby żadne dwie osoby nie zajmowały sąsiednich krzeseł?

Na ile sposobów można gotówką wypłacić 50 zł, mając do dyspozycji banknoty 20-złotowe, 10-złotowe oraz monety 5-złotowe, 2-złotowe i 1-złotowe?