

Stefan Sokołowski

MATEMATYKA DYSKRETNA

wykład 2

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2024/2025

Wykład 2, str. 1

Indukcja zupełna

$$\frac{\forall_n (\forall_{k < n} P(k) \Rightarrow P(n))}{\forall_n P(n)} \quad (\text{równoważna zwykłej})$$

Twierdzenie: Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie dwójkowym; czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$ (liczba bitów) oraz takie $b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in \{0, 1\}$ (kolejne bity), że

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^i$$

Dowód:

Przypadek $n = 0$ lub $n = 1$: $0 = 0 \cdot 2^0$ a $1 = 1 \cdot 2^0$

Przypadek $n \geq 2$: wtedy iloraz całkowity $n/2 < n$, więc z zał.ind.:

$$n/2 = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^i \quad \text{reszta}$$

przy tym $n = (n/2) \cdot 2 + n \% 2$ i $n \% 2 \in \{0, 1\}$, więc

$$\begin{aligned} n &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^i \right) \cdot 2 + n \% 2 = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^{i+1} + n \% 2 \\ &= \sum_{i=1}^k b'_i \cdot 2^i + \underbrace{n \% 2}_{b'_0} \end{aligned}$$

□

Indukcja zupełna



Tabliczka czekolady: $n = a \times b$ kostek. Ile trzeba złamań, żeby podzielić na osobne kostki?

Twierdzenie: potrzeba $n - 1$ złamań.

Dowód:

Zał. induk.: dla dowolnej tabliczki złożonej z $k < n$ kostek potrzeba $k - 1$ złamań

Teza induk.: dla tabliczki złożonej z n kostek potrzeba $n - 1$ złamań

Za pomocą pierwszego złamania otrzymujemy

tabliczkę o k_1 kostkach i

tabliczkę o $k_2 = n - k_1$ kostkach

przy tym

$$k_1 < n \text{ oraz } k_2 < n$$

Wobec tego sumaryczna liczba złamań:

$$1 + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) = k_1 + k_2 - 1 = n - 1$$

□

Sumy kolejnych liczb, ich kwadratów, sześciątów itp.

$$\sum_{k=1}^n k = ?$$

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = (k^2 + 2k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 4k$$

czyli

$$4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$$

więc

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 1 = 2^2 - 0^2 \\ 4 \cdot 2 = 3^2 - 1^2 \\ 4 \cdot 3 = 4^2 - 2^2 \\ 4 \cdot 4 = 5^2 - 3^2 \\ \dots \\ 4 \cdot (n-2) = (n-1)^2 - (n-3)^2 \\ 4 \cdot (n-1) = n^2 - (n-2)^2 \\ 4 \cdot n = (n+1)^2 - (n-1)^2 \end{array} \right\}$$

Uwaga, kropczki!

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= (n+1)^2 + n^2 - 1^2 - 0^2 \\ &= 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sumy kolejnych liczb, ich kwadratów, sześciątów itp.

Z powodu tych niedodefiniowanych kropeczek, **to nie był porządný dowód**, to był tylko sposób wpadnięcia na pomysł. Teraz trzeba udowodnić:

Twierdzenie: Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dowód:

Przyp. bazowy dla $n = 0$: oczywiste.

Krok indukcyjny:

zał. indukcyjne: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

teza indukcyjna: $\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

□

Sumy kolejnych liczb, ich kwadratów, sześciątów itp.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = ?$$

$$(k+1)^3 - (k-1)^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 6k^2 + 2$$

czyli

$$6k^2 + 2 = (k+1)^3 - (k-1)^3$$

więc

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot 1^2 + 2 & = & 2^3 - 0^3 \\ 6 \cdot 2^2 + 2 & = & 3^3 - 1^3 \\ 6 \cdot 3^2 + 2 & = & 4^3 - 2^3 \\ 6 \cdot 4^2 + 2 & = & 5^3 - 3^3 \\ \dots & & \dots \\ 6 \cdot (n-2)^2 + 2 & = & (n-1)^3 - (n-3)^3 \\ 6 \cdot (n-1)^2 + 2 & = & n^3 - (n-2)^3 \\ 6 \cdot n^2 + 2 & = & (n+1)^3 - (n-1)^3 \end{array}$$

Uwaga, kropeczki!

$$\begin{aligned} 6 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + 2n &= \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ &= (n+1)^3 + n^3 - 1^3 - 0^3 \\ &= 2n^3 + 3n^2 + 3n \\ &= n(2n^2 + 3n + 1) + 2n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sumy kolejnych liczb, ich kwadratów, sześciątów itp.

Twierdzenie: Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dowód:

Przyp. bazowy dla $n = 0$: oczywiste.

Krok indukcyjny:

zał. indukcyjne: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

teza indukcyjna: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)((2n^2+n) + (6n+6))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

□

Zbiór zbiorów

Twierdzenie: Dowolny zbiór n -elementowy ma 2^n różnych podzbiorów.

Np. zbiór 3-elementowy $\{0, 1, 2\}$ ma $2^3 = 8$ podzbiorów:

$$\{\} \quad \{0\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{0, 1\} \quad \{0, 2\} \quad \{1, 2\} \quad \{0, 1, 2\}$$

Dowód:

Przyp. bazowy dla $n = 0$: zbiór 0-elementowy (pusty) ma $2^0 = 1$ podzbiór — siebie samego.

Krok indukcyjny:

zał. indukcyjne: dowolny zbiór n -elementowy ma 2^n podzbiorów

teza indukcyjna: dowolny zbiór $n+1$ -elementowy ma 2^{n+1} podzbiorów

Z $n+1$ -elementowego zbioru A wyjmijmy jeden element, powiedzmy a . Każdemu podzbiоровi pozostałego n -elementowego zbioru $A \setminus \{a\}$, $B \subseteq A \setminus \{a\}$, odpowiadają dwa różne podzbiory całego A :

$$B \subseteq A \quad \text{oraz} \quad B \cup \{a\} \subseteq A$$

Wobec tego zbiór A ma dwukrotnie więcej podzbiorów niż zbiór $A \setminus \{a\}$, czyli ma ich $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

□

Gra w zapalki

Zasady gry:

1. na stole leży kupka n zapalek
2. 2 gracze wykonują ruchy na przemian
3. ruch polega na usunięciu z kupki 1 lub 2 lub 3 zapalek
4. kto usunie ostatnią zapalkę, ten **przegrywa**



Twierdzenie:

Jeśli po wykonaniu ruchu przez gracza liczba zapalek na stole wynosi $n = 4k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to ten gracz ma taktykę wygrywającą.

Dowód:

Dla $k = 0$ — oczywiste.

Zał., że prawda dla k . Jeśli $n = 4(k + 1) + 1$, to należy w następnym ruchu usunąć $4 - p$ zapalek, gdzie p to ruch przeciwnika. Zostanie zapalek

$$n - p - (4 - p) = n - 4 = 4(k + 1) + 1 - 4 = 4k + 1$$

więc stosuje się zał.ind.

□

Analiza programu: system pucharowy

Tablica a :

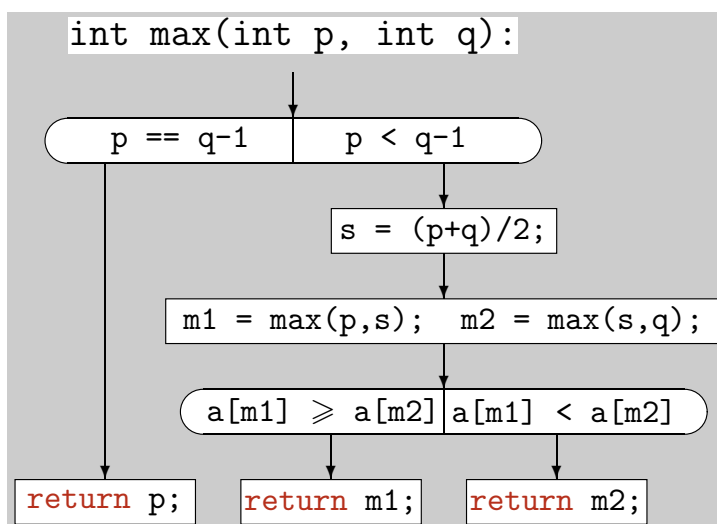


Po $m = \max(p, q)$; mamy:

$$p \leq m < q \wedge \forall_i (p \leq i < q \Rightarrow \text{tab}[i] \leq \text{tab}[m])$$

Dowód:

Indukcja **zupełna** ze względu na $q - p$.



Wniosek:

Wywołanie $\max(0, n)$ wylicza miejsce w tablicy, gdzie mieści się jej największy element.

Rekurencje

Jak z zależności lokalnych wyliczyć ogólny wzór?

Na przykład:



1. Wiemy, jak grzeje piec.
2. Wiemy, jak ziębią okna.
3. Wiemy, że temperatura w każdym centymetrze sześciennym jest średnią temperatur w sąsiednich centymetrach sześciennych.

Jak policzyć temperaturę np. w **tym** centymetrze sześciennym?

Punkt 3 powyżej:

temperatura w danym punkcie jest znaną funkcją temperatur sąsiadów — zależność *rekurencyjna*.

Punkty 1 i 2 powyżej: wartości brzegowe (początkowe).

Rekurencyjna definicja ciągu nieskończonego

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n = 0 \\ 1 & \text{jeśli } n = 1 \\ \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2} & \text{jeśli } n \geq 2 \end{cases}$$

zależność rekurencyjna

wartości brzegowe

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$

.....

A jakim wzorem wyraża się ogólny n -ty wyraz

$$a_n = ??? \dots n \dots ???$$

Rekurencyjna definicja ciągu nieskończonego

Jak przejść z rekurencji do wzoru na n -ty wyraz ciągu?

Ogólnej metody nie ma, chociaż jest do pewnych postaci rekurencji.

Ale zgadnięty wzór można potwierdzić przez indukcję.

Twierdzenie: Rozwiązaniem rekurencji

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n = 0 \\ 1 & \text{jeśli } n = 1 \\ \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2} & \text{jeśli } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{jest} \quad a_n = \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{n-1}}{3}$$

Dowód:

Baza: $a_0 = 0 \quad \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{0-1}}{3} = \frac{2 + \frac{1}{-2}}{3} = \frac{2-2}{3} = 0$

$a_1 = 1 \quad \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{1-1}}{3} = \frac{2+1}{3} = 1$

Krok.ind.:
$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{2 + (-\frac{1}{2})^{n-3}}{3} + \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{n-2}}{3}}{2}$$
$$= \frac{4 + (-\frac{1}{2})^{n-3}(1 - \frac{1}{2})}{6} = \frac{4 + (-\frac{1}{2})^{n-3}(-\frac{1}{2})^2 \cdot 2}{6} = \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{n-1}}{3}$$

□

Inna rekurencja

Jeszcze nie twierdzenie: Rozwiązaniem rekurencji

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n = 0 \\ a_{n-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}} + 1 & \text{jeśli } n \geq 1 \end{cases}$$

jest $a_n = ???$

Kilka kolejnych wartości ciągu a_n :

$n =$	obliczenie a_n	wartość a_n
0		0
1	$0 + 3 \cdot \sqrt[3]{0^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{0} + 1$	1
2	$1 + 3 \cdot \sqrt[3]{1^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{1} + 1$	8
3	$8 + 3 \cdot \sqrt[3]{8^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{8} + 1$	27
4	$27 + 3 \cdot \sqrt[3]{27^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{27} + 1$	64
...	...	...

$$a_n = n^3 ?$$

Inna rekurencja

Twierdzenie: *Rozwiązaniem rekurencji*

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n = 0 \\ a_{n-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}} + 1 & \text{jeśli } n \geq 1 \end{cases}$$

jest $a_n = n^3$

Dowód:

Przyp.bazowy: oczywisty

Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{a_{n-1}} + 1 \\ &= (n-1)^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{((n-1)^3)^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{(n-1)^3} + 1 \\ &= (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\ &= n^3 \end{aligned}$$

□