

Indukcja matematyczna, rekurencje

Stefan Sokołowski

Elbląg, 7 III 2025

Zadanie 1:

Udowodnić przez indukcję, że

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{dla } n \geq 0$$

Zadanie 2:

Udowodnić przez indukcję, że

$$11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2(n+1)} \quad \text{dla } n \geq 0$$

Zadanie 3:

Udowodnić nierówność Bernoulliego:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{dla } n \geq 0 \text{ i } x > -1$$

Uwaga: $x \in \mathbb{R}$ — liczba rzeczywista.

Zadanie 4:

Udowodnić, że dla $n \geq 2$ ostatnią cyfrą liczby 2^{2^n} jest 6.

Zadanie 5:

Udowodnić, że średnia geometryczna ciągu rzeczywistych liczb dodatnich nigdy nie przekracza ich średniej arytmetycznej:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{dla } n \geq 1$$

Wskazówka:

$\prod$ oznacza iloczyn ciągu liczb

Zadanie 6:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 3 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 7 (domowe na punkty):

Podać wzór na n -ty wyraz ciągu $a_0, a_1, a_2, \dots$ takiego, że

- $a_0 = 1$ i $a_2 = -4$, oraz
- każdy wyraz oprócz zerowego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedzającego i następującego, czyli

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wskazówka: proszę nie bać się liczb zespolonych.

Uwaga:

Czas na przysyłanie (na s.sokolowski@ans-elblag.pl): 2 tygodnie od zajęć z lab.2 — potem już nie przyjmuję rozwiązań. Liczba punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.

Zadanie 8:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 0.5 & \text{dla } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{n^2 - 2}{n(n-1)(n-2)} - 1 & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Proszę zwrócić uwagę, że rekursja jest tu głębsza: sięga od n aż do $n-2$.

Zadanie 9:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 3 & \text{dla } n = 1 \\ 9 & \text{dla } n = 2 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} + \frac{4a_{n-2}^2}{3a_{n-3}} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać (t.zn. zgadnąć i udowodnić) nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Proszę zwrócić uwagę, że tu rekursja jest jeszcze głębsza: od n aż do $n-3$.
