

Stefan Sokołowski

MATEMATYKA DYSKRETNA

wykład 3

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2024/2025

Wykład 3, str. 1

Rekurencje liniowe **jednorodne**

Definicja:

Rekurencja *liniowa jednorodna stopnia k* ma postać:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_0 & \text{dla } n = 0 \\ c_1 & \text{dla } n = 1 \\ \dots & \dots \\ c_{k-1} & \text{dla } n = k - 1 \\ d_1 \cdot a_{n-1} + \dots + d_{k-1} \cdot a_{n-(k-1)} + d_k \cdot a_{n-k} & \text{dla } n \geq k \end{cases}$$

gdzie $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ to dane liczby.

Tak więc:

- pierwsze k elementów ciągu są podane (stałe $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$)
- zależność rekurencyjna jest kombinacją liniową k wyrazów ciągu poprzedzających dany ($d_1, d_2, \dots, d_k$ — podane współczynniki kombinacji liniowej)

Rekurencje liniowe

Przykład: (ciąg Fibonacciego)

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

To tak, jak gdyby w jakimś gatunku złożonym z osobników **czerwonych** i **zielonych**

potomkiem **czerwonego** był zawsze

jeden zielony

potomkiem **zielonego** była zawsze

para: zielony i czerwony

pokolenie 0		liczność: 1
pokolenie 1		liczność: 1
pokolenie 2		liczność: 2
pokolenie 3		liczność: 3
pokolenie 4		liczność: 5
pokolenie 5		liczność: 8
pokolenie 6		liczność: 13

a_n — liczność n -tego pokolenia

Rekurencje liniowe

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie rekurencji liniowej:

$$\begin{array}{rcccl} a_n & = & a_{n-1} & + & a_{n-2} \\ a_n & - & a_{n-1} & - & a_{n-2} = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x^2 & - & x & - & 1 = 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{równanie charakterystyczne}$$

wielomian
charakterystyczny

Pierwiastki: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \quad \text{bo to jest pierwiastek równ. char.} \\ & = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Rekurencje liniowe

Ogólnie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & = & d_1 \cdot a_{n-1} & + \dots + & d_k \cdot a_{n-k} & & \\
 a_n & - & d_1 \cdot a_{n-1} & - \dots - & d_k \cdot a_{n-k} & = & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 x^k & - & d_1 \cdot x^{k-1} & - \dots - & d_k \cdot x^0 & = & 0 \quad \leftarrow \text{równanie charakterystyczne}
 \end{array}$$

Twierdzenie:

Jeśli liczba α jest p -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego rekurencji, to

$$\begin{array}{ccccccc}
 n^0 \cdot \alpha^n & = & d_1 \cdot (n-1)^0 \cdot \alpha^{n-1} & + \dots + & d_k \cdot (n-k)^0 \alpha^{n-k} & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \\
 n^{p-1} \cdot \alpha^n & = & (n-1)^{p-1} \cdot d_1 \cdot \alpha^{n-1} & + \dots + & (n-k)^{p-1} \cdot d_k \cdot \alpha^{n-k} & &
 \end{array}$$

czyli ciągi

$$\alpha^n, \quad n \cdot \alpha^n, \quad n^2 \cdot \alpha^n, \quad \dots, \quad n^{p-1} \cdot \alpha^n$$

spełniają zależność rekurencyjną.

Rekurencje liniowe

Twierdzenie:

Jeśli jakieś ciągi $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ i $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ spełniają zależność rekurencyjną, to dla dowolnych liczb $p, q \in \mathbb{R}$ ciąg

$$c_n = p \cdot a_n + q \cdot b_n$$

również spełnia zależność rekurencyjną.

Wniosek:

Zbiór ciągów spełniających zależność rekurencyjną stanowi przestrzeń liniową.

Dla rekurencji stopnia k ta przestrzeń rozwiązań jest k -wymiarowa. Jej bazę stanowią ciągi postaci $n^i \cdot \alpha^n$, gdzie α jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, a $0 \leq i < p$, gdzie p jest krotnością pierwiastka α .

Jeden ciąg z tej przestrzeni stanowi rozwiązanie rekurencji; pozostałe nie spełniają warunków początkowych.

Jak ten ciąg znaleźć?

Rekurencje liniowe

Znowu ciąg Fibonacciego:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Pierwiastki: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Wiec każde rozwiązanie rekurencji ma postać

$$a_n^{(o)} = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + q \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{— rozwiązanie ogólne}$$

Wartości początkowe ciągu muszą spełniać tą równość; mamy więc:

$$1 = a_0 = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + q \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0$$

$$1 = a_1 = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + q \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

— 2 równania z dwiema niewiadomymi p i q .

Rekurencje liniowe

Ciąg Fibonacciego, c.d.:
$$\begin{cases} p + q = 1 \\ p \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + q \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$q = 1 - p$$

$$p \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + (1-p) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$p \cdot 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = 1$$

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

wiec

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

i ostatecznie

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Rekurencje liniowe — różne przypadki

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 5 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -a_{n-1} + 6a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$

Pierwiastki: 1-krotny 2; 1-krotny -3

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 2^n + q \cdot (-3)^n$

Wartości początkowe: $5 = a_0 = p \cdot 2^0 + q \cdot (-3)^0$
 $0 = a_1 = p \cdot 2^1 + q \cdot (-3)^1$

$$\begin{cases} p + q = 5 \\ 2p - 3q = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 3 \\ q = 2 \end{matrix}$$

Więc

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n$$

Rekurencje liniowe — różne przypadki

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 3 & \text{dla } n = 1 \\ 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

Pierwiastki: 2-krotny 3

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 3^n + q \cdot n \cdot 3^n$

Wartości początkowe: $0 = a_0 = p \cdot 3^0 + q \cdot 0 \cdot 3^0$
 $3 = a_1 = p \cdot 3^1 + q \cdot 1 \cdot 3^1$

$$\begin{cases} p = 0 \\ 3p + 3q = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0 \\ q = 1 \end{matrix}$$

Więc

$$a_n = n \cdot 3^n$$

Rekurencje liniowe — różne przypadki

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 8 & \text{dla } n = 2 \\ 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

Pierwiastki: 3-krotny 2

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 2^n + q \cdot n \cdot 2^n + r \cdot n^2 \cdot 2^n$

Wartości początkowe: $0 = a_0 = p \cdot 2^0 + q \cdot 0 \cdot 2^0 + r \cdot 0^2 \cdot 2^0$
 $0 = a_1 = p \cdot 2^1 + q \cdot 1 \cdot 2^1 + r \cdot 1^2 \cdot 2^1$
 $8 = a_2 = p \cdot 2^2 + q \cdot 2 \cdot 2^2 + r \cdot 2^2 \cdot 2^2$

$$\begin{cases} p = 0 \\ 2p + 2q + 2r = 0 \\ 4p + 8q + 16r = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 0 \\ q + r = 0 \\ q + 2r = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = -1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Więc

$$a_n = -n \cdot 2^n + n^2 \cdot 2^n = n \cdot (n - 1) \cdot 2^n$$

Rekurencje liniowe — różne przypadki

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -4a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^2 + 4 = (x - 2i) \cdot (x + 2i)$

Pierwiastki: 1-krotny $2i$; 1-krotny $-2i$;

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot (-2i)^n + q \cdot (2i)^n$

Wartości początkowe: $2 = a_0 = p \cdot (-2i)^0 + q \cdot (2i)^0$
 $0 = a_1 = p \cdot (-2i)^1 + q \cdot (2i)^1$

$$\begin{cases} p + q = 2 \\ p \cdot (-2i) + q \cdot (2i) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}$$

Więc

$$a_n = (-2i)^n + (2i)^n$$

liczba nierzeczywista?!

Rekurencje liniowe — różne przypadki

Przykład, c.d.:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -4a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

jeśli $2 \mid n$ to 2
jeśli $2 \nmid n$ to 0

$$a_n = (-2i)^n + (2i)^n = 2^n \cdot i^n \cdot ((-1)^n + 1)$$

$$= \begin{cases} 2^{n+1} & \text{jeśli } n \% 4 = 0 \\ 0 & \text{jeśli } n \% 4 = 1 \\ -2^{n+1} & \text{jeśli } n \% 4 = 2 \\ 0 & \text{jeśli } n \% 4 = 3 \end{cases}$$

rozwiązanie jest jednak rzeczywiste...

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Definicja:

Rekurencja *liniowa niejednorodna stopnia k* ma postać:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_0 & \text{dla } n = 0 \\ c_1 & \text{dla } n = 1 \\ \dots & \dots \\ c_{k-1} & \text{dla } n = k-1 \\ \sum_{i=1}^k d_i \cdot a_{n-i} + \underbrace{f(n)}_{\text{„wyraz wolny” rekurencji}} & \text{dla } n \geq k \end{cases}$$

$c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$
 $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}$
 f — funkcja na $\mathbb{N}$

Potrąfimy znaleźć rozwiązanie takiej rekurencji dla **niektórych** (często spotykanych) postaci funkcji f :

- kiedy $f(n)$ jest wielomianem (nie zawsze...)
- kiedy $f(n)$ jest funkcją wykładniczą $f(n) = c \cdot \alpha^n$, gdzie α jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, a $c \in \mathbb{R}$ jest stałą.

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Rozwiązanie rekurencji liniowej niejednorodnej

1. na razie zapomnieć o wyrazie wolnym i znaleźć rozwiązanie ogólne $a_n^{(o)}$ rekurencji jednorodnej
2. zgadnąć jakieś rozwiązanie szczególne $a_n^{(s)}$ rekurencji niejednorodnej (już z wyrazem wolnym) wg tej tabelki

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest t -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^t \cdot \alpha^n$

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Rozwiązanie rekurencji liniowej niejednorodnej, c.d.

3. rozwiązanie rekurencji będzie miało postać

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(s)}$$

(występują w nich dotąd nieustalone współczynniki kombinacji liniowej w $a_n^{(o)}$)

4. wyznaczyć brakujące współczynniki w oparciu o wartości początkowe rekurencji

Czy to są wielomiany?

... bo niektórzy
robią w tym
błędy. ...

- | | | |
|-----------------------|---|---------------------|
| $1 + n + n^2$ | — | wielomian stopnia 2 |
| 5 | — | wielomian stopnia 0 |
| $1 + n^{-1} + n^{-2}$ | — | nie wielomian |
| $n^2(1 + n)$ | — | wielomian stopnia 3 |
| $n + \frac{n+1}{n-1}$ | — | nie wielomian |

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -3 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3^n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

wyraz wolny

Wielomian charakterystyczny: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

Pierwiastki: 1-krotny 2; 1-krotny 3

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n$

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest t -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^t \cdot \alpha^n$

$$\alpha = 3$$

$$t = 1$$

— wyraz wolny jest funkcją wykładniczą o podstawie 3, będącej pierwiastkiem 1-krotnym wielomianu charakterystycznego

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

$$a_n^{(s)} = B \cdot n \cdot 3^n$$

z zależności rekurencyjnej:

$$B \cdot n \cdot 3^n = 5B \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1} - 6B \cdot (n-2) \cdot 3^{n-2} + 3^n$$

$$B \cdot n \cdot 3^2 = 5B \cdot (n-1) \cdot 3 - 6B \cdot (n-2) + 3^2$$

$$9Bn = 15Bn - 15B - 6Bn + 12B + 9$$

$$0 = -3B + 9$$

$$B = 3$$

$$a_n^{(s)} = n \cdot 3^{n+1}$$

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(s)} = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

$$\begin{cases} -3 = a_0 = p + q \\ 0 = a_1 = 2p + 3q + 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0 \\ q = -3 \end{matrix}$$

$$a_n = -3 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

$$a_n = (n-1) \cdot 3^{n+1}$$

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -4 & \text{dla } n = 0 \\ 6 & \text{dla } n = 1 \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4^n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

Pierwiastki: 1-krotny 2; 1-krotny 3

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n$

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest t -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^t \cdot \alpha^n$

$$\alpha = 4$$

$$t = 0$$

— wyraz wolny jest funkcją wykładniczą o podstawie 4, będącej pierwiastkiem 0-krotnym wielomianu charakterystycznego

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

$$a_n^{(s)} = B \cdot 4^n$$

z zależności rekurencyjnej:

$$B \cdot 4^n = 5B \cdot 4^{n-1} - 6B \cdot 4^{n-2} + 4^n$$

$$B \cdot 4^2 = 5B \cdot 4 - 6B + 4^2$$

$$16B = 20B - 6B + 16$$

$$2B = 16$$

$$B = 8$$

$$a_n^{(s)} = 8 \cdot 4^n$$

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(s)} = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n$$

$$\begin{cases} -4 = a_0 = p + q + 8 & p = -10 \\ 6 = a_1 = 2p + 3q + 32 & q = -2 \end{cases}$$

$$a_n = -10 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n$$

$$a_n = -2^{n+1}(5 + 2^{n+2}) - 2 \cdot 3^n$$

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Przykład: („poprawiony” ciąg Fibonacciego)

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

nowy składnik

Wielomian charakterystyczny: $x^2 - x - 1 = (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cdot (x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest t -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^t \cdot \alpha^n$

$r = 1$
— wyraz wolny **jest** wielomianem stopnia 1;
a $a_n^{(o)}$ **nie jest** wielomianem

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

$$a_n^{(s)} = g_0 + g_1 n$$

z zależności rekurencyjnej:

$$g_0 + g_1 n = \underbrace{g_0 + g_1(n-1)} + \underbrace{g_0 + g_1(n-2)} + n$$

$$g_0 + g_1 n = (2g_0 - 3g_1) + (2g_1 + 1)n$$

$$(g_0 - 3g_1) + (g_1 + 1)n = 0$$

$$\begin{cases} g_0 - 3g_1 = 0 \\ g_1 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} g_0 = -3 \\ g_1 = -1 \end{matrix}$$

$$a_n^{(s)} = -3 - n$$

wielomian jest dla każdego n równy 0
wtedy i tylko wtedy, gdy
jego wszystkie współczynniki są zerowe

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(s)} = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 3 - n$$

$$\begin{cases} 1 = a_0 = p + q - 3 \\ 1 = a_1 = p \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 2 + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ q = 2 - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{matrix}$$

$$a_n = \left(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 3 - n$$

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

Przykład:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } n = 0 \\ 2 & \text{dla } n = 1 \\ 2a_{n-1} - a_{n-2} + n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Wielomian charakterystyczny: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Rozwiązanie ogólne postaci: $a_n^{(o)} = p \cdot 1^n + q \cdot n1^n = p + q \cdot n$

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest t -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^t \cdot \alpha^n$

$$r = 1$$

$$s = 1$$

— wyraz wolny **jest** wielomianem stopnia 1; i $a_n^{(o)}$ **jest** wielomianem stopnia 1

Rekurencje liniowe **niejednorodne**

$$a_n^{(s)} = n^2 \cdot \sum_{i=0}^1 g_i n^i = g_0 n^2 + g_1 n^3$$

z zależności rekurencyjnej:

$$g_0 n^2 + g_1 n^3 = \underbrace{2g_0(n-1)^2 + 2g_1(n-1)^3}_{\text{...}} - \underbrace{g_0(n-2)^2 + g_1(n-2)^3}_{\text{...}} + n$$

$$g_0 n^2 + g_1 n^3 = (-2g_0 + 6g_1) + (1 - 6g_1)n + g_0 n^2 + g_1 n^3$$

$$\begin{cases} -2g_0 + 6g_1 = 0 \\ 1 - 6g_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} g_0 = \frac{1}{2} \\ g_1 = \frac{1}{6} \end{matrix}$$

$$a_n^{(s)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(s)} = p + qn + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = a_0 = p \\ 2 = a_1 = p + q + \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} p = \frac{1}{3} \\ q = 1 \end{matrix}$$

$$a_n = \frac{1}{3} + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

Wyścig zmiennych w programie

W tej nieskończonej pętli wartości zmiennych a , b , c , d rosną za każdym obrotem. Jak szybko która rośnie?

```
int  a = b = c = d = n = 2;
int  n = 1;
while (true) {
    a = a+n;  b = b*2;
    c = c*n;  d = d*d;
    n = n+1;
}
```

Trzeba rozwiązać następujące rekurencje:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ a_{n-1} + n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ b_{n-1} \cdot 2 & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ c_{n-1} \cdot n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ d_{n-1} \cdot d_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$