

Matematyka dyskretna dla niestacjonarnych — ćwiczenia 3

Rekurencje liniowe jednorodne i niejednorodne

Stefan Sokołowski

Elbląg, 22 III 2025

Zadanie 1:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ -4 & \text{dla } n = 2 \\ -3a_{n-1} + 4a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Rozwiązanie:

Na razie zajmujemy się tylko przypadkiem rekursywnym, czyli dla $n \geq 3$. Wielomian charakterystyczny tej rekurencji jednorodnej ma postać

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2$$

a więc ma pierwiastki:

- jednokrotny: 1; oraz
- dwukrotny: -2 .

Wobec tego rozwiązanie rekurencji ma postać:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot \mathbf{1}^n + s \cdot (-2)^n + t \cdot \mathbf{n} \cdot (-2)^n \quad (2)$$

dla pewnych liczb $r, s, t \in \mathbb{R}$; które trzeba jeszcze ustalić.

W (2) podstawmy za n kolejno 0, 1 i 2; otrzymamy następujący układ równości:

$$\begin{aligned} a_0 = 1 &= r \cdot 1^0 + s \cdot (-2)^0 + t \cdot 0 \cdot (-2)^0 \\ a_1 = 0 &= r \cdot 1^1 + s \cdot (-2)^1 + t \cdot 1 \cdot (-2)^1 \\ a_2 = -4 &= r \cdot 1^2 + s \cdot (-2)^2 + t \cdot 2 \cdot (-2)^2 \end{aligned}$$

co daje układ równań liniowych z niewiadomymi r, s i t :

$$\begin{aligned} r + s &= 1 \\ r - 2s - 2t &= 0 \\ r + 4s + 8t &= -4 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu jest

$$\begin{aligned}r &= 0 \\s &= 1 \\t &= -1\end{aligned}$$

co po podstawieniu do (2) daje

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} (1 - n) \cdot (-2)^n$$

jako rozwiązanie (1).

Zadanie 2:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 3 & \text{dla } n = 1 \\ -3a_{n-1} - 2a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 3:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 8a_{n-1} - 16a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 4:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 9 & \text{dla } n = 0 \\ 5 & \text{dla } n = 1 \\ -31 & \text{dla } n = 2 \\ a_{n-1} - 9a_{n-2} + 9a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 5 (domowe specjalne):

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 4 & \text{dla } n = 2 \\ 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.

Rekurencje liniowe **nie**jednorodne

Rekurencja **nie**jednorodna:

$$a_n = \sum_{i=1}^k c_i \cdot a_{n-i} + \textcircled{f(n)} \text{ --- wyraz wolny rekurencji} \quad (3)$$

Założmy, że $a_n^{(o)}$ jest ogólnym rozwiązaniem odpowiadającej rekurencji jednorodnej. Jak szukać rozwiązania **szczególnego** $a_n^{(s)}$ rekurencji **nie**jednorodnej (3)?

- **Przypadek, gdy $f(n)$ jest wielomianem stopnia r :**

- jeśli $a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia p , to

$$a_n^{(s)} = n^{p+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^r d_i \cdot n^i \right)$$

- jeśli $a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem, to

$$a_n^{(s)} = \sum_{i=0}^r d_i \cdot n^i$$

- **Przypadek, gdy $f(n) = A \cdot \alpha^n$**

- jeśli α jest p -krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to

$$a_n^{(s)} = B \cdot n^p \cdot \alpha^n$$

- jeśli α **nie** jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to

$$a_n^{(s)} = B \cdot \alpha^n$$

		rozwiązanie ogólne		
		$a_n^{(o)}$ nie jest wielomianem	$a_n^{(o)}$ jest wielomianem stopnia s	α jest p -krotnym pierwiastkiem wiel. char.
wyraz wolny	$f(n)$ jest wielomianem stopnia r	$\sum_{i=0}^r g_i n^i$	$n^{s+1} \cdot \sum_{i=0}^r g_i n^i$	
	$f(n)$ jest fcją wykładn. $A \cdot \alpha^n$			$B \cdot n^p \cdot \alpha^n$

Zadanie 6:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 7:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 2 & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 8:

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada następującą definicję rekurencyjną:

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ 4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 5^n & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

Podać nierekurencyjny wzór, uzależniający a_n od n .

Zadanie 9 (domowe na punkty):

Poniższy fragment programu w C sortuje (czyli: porządkuje wg „wzrostu”) tablicę liczb rzeczywistych `tab[0 .. dlug-1]` :

```
void insert_sort(int dlug, double tab[ ]) {
    if (dlug >= 2) {
        insert_sort(dlug-1, tab);
        dlug--;
        while (dlug >= 1 && tab[dlug-1] > tab[dlug]) {
            zamień(tab, dlug-1, dlug); dlug--;
        }
    }
}
```

Ile zamian wykonuje ten program (w najgorszym przypadku) dla ciągu o danej długości? Proszę sformułować odpowiednią zależność rekurencyjną do tego fragmentu programu, uzasadnić ją, a następnie rozwiązać.

Uwaga:

Czas na przysłanie (na s.sokolowski@ans-elblag.pl): 2 tygodnie od zajęć z lab.3 — potem już nie przyjmuję rozwiązań. Liczba punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania.
