

Podzielność

Stefan Sokołowski

Elbląg, 29 III 2025

Zadanie 1:

Wykazać, że $24 \mid n(n^2 - 1)$ dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n .

Rozwiązanie:

$$n(n^2 - 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$$

Więc $n(n^2 - 1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, któraś z nich musi być podzielna przez 3 i $3 \mid n(n^2 - 1)$.

Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, więc $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Dlatego

$$n(n^2 - 1) = (2k + 1)((2k + 1)^2 - 1) = (2k + 1)(4k^2 + 4k) = (2k + 1) \cdot 4k(k + 1)$$

Ponieważ $k(k + 1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych, któraś z nich musi być parzysta, więc $2 \mid k(k + 1)$; wobec tego $8 \mid 4 \cdot k(k + 1)$; wobec tego $8 \mid n(n^2 - 1)$.

Skoro $n(n^2 - 1)$ dzieli się zarówno przez 3 jak przez 8, to dzieli się przez 24.

Zadanie 2:

Wykazać, że liczba 9870456432 nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Wskazówka:

Przebadać ostatnie cyfry (czyli reszty z dzielenia przez 10) kwadratów kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 3:

Wykazać, że dla dowolnej naturalnej liczby n , albo $4 \mid n^2$ albo $4 \mid n^2 - 1$.

Algorytm Euklidesa

Zadanie 4:

Przy pomocy algorytmu Euklidesa znaleźć największy wspólny dzielnik liczb

(a) 4515 i 1176;

(b) 8820 i 945;

(c) 16 714 i 793.

Zadanie 5:

Największy wspólny dzielnik podanych niżej par liczb wyrazić jako ich całkowitoliczbową kombinację liniową:

(a) 1200 i 372;

(b) 8820 i 945;

(c) 15 391 i 1731.

Równania diofantyczne

Zadanie 6:

Znaleźć wszystkie całkowite rozwiązania równań:

(a) $260x + 144y = 10$

(b) $260x + 144y = 8$

Rozwiązanie:

Ponieważ $\text{nwd}(260, 144) = 4$ i $4 \nmid 10$, więc równanie (a) **nie ma** rozwiązania całkowitego.

Ponieważ $\text{nwd}(260, 144) = 4$ i $4 \mid 8$, więc równanie (b) **ma** rozwiązania całkowite.

Znajdźmy jedno rozwiązanie równania **niejednorodnego**

$$260 \cdot x + 144 \cdot y = 8 \tag{1}$$

Korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa wyrażamy największy wspólny dzielnik współczynników jako ich kombinację liniową:

$$260 \cdot 5 + 144 \cdot (-9) = \text{nwd}(260, 144) = 4$$

i po pomnożeniu obu stron przez 2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 260 \cdot (5 \cdot 2) + 144 \cdot (-9 \cdot 2) &= 4 \cdot 2 \quad \text{czyli} \\ 260 \cdot 10 + 144 \cdot (-18) &= 8 \end{aligned}$$

Jedno rozwiązanie równania **jednorodnego**

$$260 \cdot x + 144 \cdot y = 0 \tag{2}$$

otrzymamy przez „skrzyżowanie współczynników”:

$$260 \cdot (-144) + 144 \cdot 260 = 0$$

(przy jednym z nich należy zmienić znak); wobec tego rozwiązaniem jest $\begin{cases} x = -144 \\ y = 260 \end{cases}$. Rozwiązanie ogólne (2) otrzymamy przez podzielenie przez największy wspólny dzielnik i uwzględnienie wszystkich całkowitych wielokrotności:

$$\begin{cases} x = (-144/4) \cdot t \\ y = (260/4) \cdot t \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = -36 \cdot t \\ y = 65 \cdot t \end{cases}$$

Rozwiązaniem **ogólnym** równania **niejednorodnego** jest suma rozwiązania *szczególnego równania niejednorodnego* oraz rozwiązania *ogólnego równania jednorodnego*:

$$\begin{cases} x = 10 - 36t \\ y = -18 + 65t \end{cases}$$

Zadanie 7:

Rozwiązać (w liczbach całkowitych) następujące równania z dwiema niewiadomymi:

(a) $140x - 63y = 35$

(b) $154x + 260y = 4$

(c) $154x + 260y = 24$

(d) $7684x + 414y = 272$

(e) $516x + 564y = 6432$

(f) $17368x + 5470y = 80$
