

Podzielność, c.d.

Stefan Sokołowski

Elbląg, 10 kwietnia 2025

Zadanie 1:

Udowodnić, że $n^4 + 4$ jest liczbą złożoną dla dowolnego $n \geq 2$.

Rozwiązanie:

Liczba $n^4 + 4$ daje się rozłożyć na czynniki w następujący sposób:

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (n^2)^2 + 2^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) \end{aligned}$$

Trzeba tylko sprawdzić, że żaden z tych czynników nie jest równy 1. Ale z założenia $n \geq 2$ wynika, że

$$n^2 + 2 - 2n = n(n - 2) + 2 \geq 2(2 - 2) + 2 = 2$$

Drugi z tych czynników jest jeszcze większy.

Zadanie 2:

Które z poniższych liczb są pierwsze?

1. 2047
2. $2^{201} + 1$ (*Wskazówka:* sprawdzić podzielność przez 3)
3. $2^{201} - 1$ (*Wskazówka:* sprawdzić podzielność przez 7)

Zadanie 3:

Rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych liczby:

1. 6647
 2. 9970
-

Zadanie 4:

Wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność liczb:

1. 980 i 2100
 2. 1575 i 231
-

Zadanie 5:

Policzyć **bez użycia kalkulatora** (i nie zaplatać się w wielkich liczbach) resztę z dzielenia:

- (a) $1213^3 + 4818^5$ przez 9
- (b) $2123456789 \cdot 801234567$ przez 3
- (c) 2018^{50} przez 6
- (d) $2123456789 \cdot 801234567 + 987654321$ przez 11

Rozwiązanie:

Dla rozwiązania zadania 5(a) można wyliczyć $1213^3 + 4818^5$ a następnie podzielić przez 9, ale wtedy nie unikniemy wielkich liczb. Więc lepiej jest od razu liczyć reszty. Reszta z dzielenia liczby przez 9 jest równa reszcie z dzielenia jej sumy cyfr przez 9:

$$[1213]_9 = [1 + 2 + 1 + 3]_9 = [7]_9$$

$$[1213^3]_9 = [7 \cdot 7 \cdot 7]_9 = [49 \cdot 7]_9 = [4 \cdot 7]_9 = [28]_9 = [1]_9$$

$$[4818]_9 = [4 + 8 + 1 + 8]_9 = [21]_9 = [2 + 1]_9 = [3]_9$$

$$[4818^5]_9 = [3^5]_9 = [27 \cdot 9]_9 = [0]_9$$

$$[1213^3 + 4818^5]_9 = [1 + 0]_9 = [1]_9$$

Dlatego resztą z dzielenia liczby $1213^3 + 4818^5$ przez 9 jest 1.

Pozostałe punkty tego zadania można rozwiązać analogicznie.

Zadanie 6:

Wyznaczyć zbiory:

- (a) $[1019932]_{997} \cap \{0, 1, 2, \dots, 996\}$
 - (b) $[-1019932]_{997} \cap \{0, 1, 2, \dots, 996\}$
-

Zadanie 7:

Wyznaczyć dwie ostatnie cyfry liczb:

- (a) $2^{2019} + 3^{2020}$
 - (b) $2^{43\,112\,609} - 1$
-

Zadanie 8:

Proszę wyznaczyć **wszystkie** rozwiązania poniższych kongruencji:

(a) $5x \equiv_7 4$

(d) $96x \equiv_{324} 90$

(g) $99x \equiv_{13} 12$

(b) $4x \equiv_8 5$

(e) $96x \equiv_{324} 84$

(h) $63x \equiv_{105} 140$

(c) $7x \equiv_{11} 2$

(f) $35x \equiv_{79} 3$

(i) $63x \equiv_{105} 147$

Zadanie 9 (domowe na punkty):

Założmy, że liczby całkowite p i q są względnie pierwsze (czyli nie mają żadnego wspólnego dzielnika większego od 1); i że n jest jakąś liczbą całkowitą. Proszę udowodnić, że wtedy **dokładnie jedna** liczba spośród

$$\begin{cases} n + 0 \cdot q \\ n + 1 \cdot q \\ \vdots \\ n + (p-1) \cdot q \end{cases}$$

jest podzielna przez p .

Uwaga:

Czas na przysłanie (na s.sokolowski@ans-elblag.pl): 2 tygodnie od zajęć 5 — potem już nie przyjmuję rozwiązań. Liczba punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania. W mailu proszę koniecznie podać swoje **nazwisko, numer zajęć i numer zadania**.

Zadanie 10 (domowe specjalne):

Udowodnić, że

1. jeśli $F_k = 2^{2^k} + 1$, czyli F_k jest k -tą liczbą Fermata dla $k \in \mathbb{N}$, to

$$F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

2. każde dwie różne liczby Fermata są względnie pierwsze;
3. istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych (wynika z poprzedniego punktu).

Uwaga:

Pierwszej osobie, która przyśle mi (na s.sokolowski@ans-elblag.pl) poprawne rozwiązanie tego zadania, przysługują punkty do zaliczenia laboratorium/ćwiczeń. Liczba tych punktów zależy od oryginalności i elegancji rozwiązania. W mailu proszę koniecznie podać swoje **nazwisko, numer zajęć i numer zadania**.
