

Stefan Sokołowski

MATEMATYKA DYSKRETNA

wykład 8

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2024/2025

Wykład 8, str. 1

Kombinatoryka

Kombinatoryka — obliczanie, ile czego jest w zbiorach skończonych.

Przykład: **permutacje** — n -elementowe ciągi ze zbioru n -elementowego

Zbiór: $S = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Ciąg: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ — $a_i \in S$ dla $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

a_0 można wybrać na n sposobów; potem

a_1 można wybrać na $n-1$ sposobów; potem

a_2 można wybrać na $n-2$ sposobów; potem

.....

a_{n-1} można wybrać na 1 sposób

cały ciąg można wybrać na $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ sposobów

Każdy wybór prowadzi do innego ciągu — więc

permutacji n -elementowego zbioru S jest $n!$

Kombinatoryka

Przykład: **wariacje bez powtórzeń** — k -elementowe ciągi ze zbioru n -elementowego

Zbiór: $S = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Ciąg: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ — $a_i \in S$ dla $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$

a_0 można wybrać na n sposobów; potem

a_1 można wybrać na $n-1$ sposobów; potem

a_2 można wybrać na $n-2$ sposobów; potem

.....

a_{k-1} można wybrać na $n-(k-1)$ sposobów

cały ciąg można wybrać na $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ sposobów

Każdy wybór prowadzi do innego ciągu — więc

k -elementowych wariacji n -elementowego zbioru jest $\frac{n!}{(n-k)!}$

Kombinatoryka

Przykład: **kombinacje** — k -elementowe podzbiory zbioru n -elementowego

$n = 3$ $k = 2$	$n = 4$ $k = 2$	$n = 5$ $k = 3$	$n = 6$ $k = 2$
$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$ $\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$ $\{0, 3, 4\}$	$\{0, 1\}$ $\{1, 2\}$ $\{2, 4\}$
$\{0, 2\}$	$\{0, 2\}$ $\{1, 3\}$	$\{0, 1, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$	$\{0, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 5\}$
$\{1, 2\}$	$\{0, 3\}$ $\{2, 3\}$	$\{0, 1, 4\}$ $\{1, 2, 4\}$	$\{0, 3\}$ $\{1, 4\}$ $\{3, 4\}$
		$\{0, 2, 3\}$ $\{1, 3, 4\}$	$\{0, 4\}$ $\{1, 5\}$ $\{3, 5\}$
		$\{0, 2, 4\}$ $\{2, 3, 4\}$	$\{0, 5\}$ $\{2, 3\}$ $\{4, 5\}$
3	6	10	15

— zbiory a nie ciągi

utożsamiamy ciągi różniące się tylko porządkiem elementów

np. 3-elementowe wariacje zbioru 5-elementowego $(4, 2, 3)$ i $(3, 2, 4)$ dają tę samą kombinację $\{2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} \text{liczba } k\text{-kombinacji zbioru } n\text{-elem.} &= \frac{\text{liczba } k\text{-wariacji zb. } n\text{-elem.}}{\text{liczba permutacji zb. } k\text{-elem.}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \end{aligned}$$

Symbole Newtona

liczba k -kombinacji zbioru n -elem. $= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Oznaczenie:

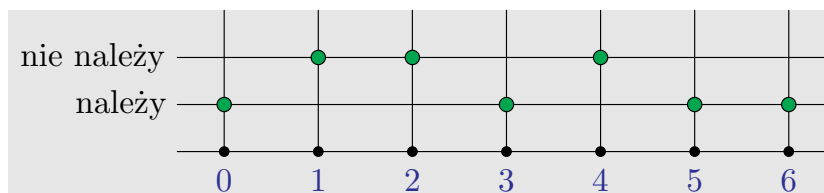
$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{dla } k, n \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq n$$

— symbol Newtona lub współczynnik dwumianowy

Ważna własność:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

— bo **wszystkich** podbiorów jest 2^n :



zbiór $\{0, 3, 5, 6\}$

Symbole Newtona

Oznaczenie:

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{dla } k, n \in \mathbb{N} \text{ i } 0 \leq k \leq n$$

— symbol Newtona lub współczynnik dwumianowy

Dalsze własności:

(a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(c) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(e) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(b) $\binom{n}{1} = n$

(d) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dowód: (e)

$$\text{prawa} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} \cdot \frac{k+n-k}{k \cdot (n-k)}$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = \text{lewa}$$

□

Symbole Newtona

Jak obliczać symbol Newtona? —

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
#include<stdio.h>

int sil(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n*sil(n-1);
}

int newt(int n, int k) {
    return silnia(n)/(sil(k)*sil(n-k));
}

int main() {
    int n, k;
    printf("\n n == "); scanf("%i", &n);
    printf(" k == "); scanf("%i", &k);
    printf("\n newt(%i, %i) == %i\n\n",
           n, k, newt(n,k)
    );
    return 0;
}
```

```
n == 10
k == 1
newt(10, 1) == 10
```

OK!

```
n == 13
k == 1
newt(13, 1) == 4
```

ŹLE!

— przekroczenie zakresu int

Symbole Newtona

Więc jak obliczać symbol Newtona? —

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
#include<stdio.h>

int newt(int n, int k) {
    if (k==0 || k==n) return 1;
    else return newt(n-1, k-1)
           + newt(n-1, k);
}

int main() {
    int n, k;
    printf("\n n == "); scanf("%i", &n);
    printf(" k == "); scanf("%i", &k);
    printf("\n newt(%i, %i) == %i\n\n",
           n, k, newt(n,k)
    );
}
```

```
n == 13
k == 1
newt(13, 1) == 13
```

OK!

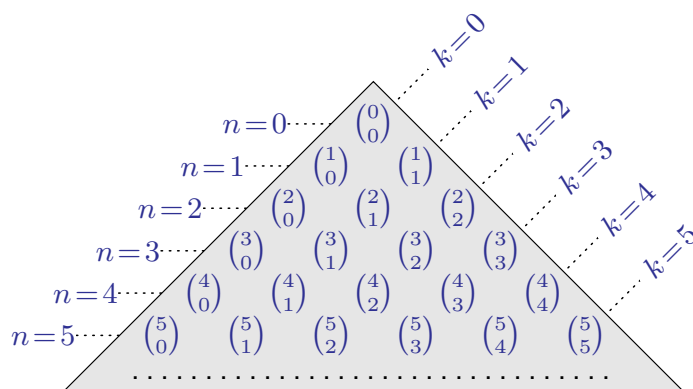
```
n == 13
k == 2
newt(13, 2) == 78
```

OK!

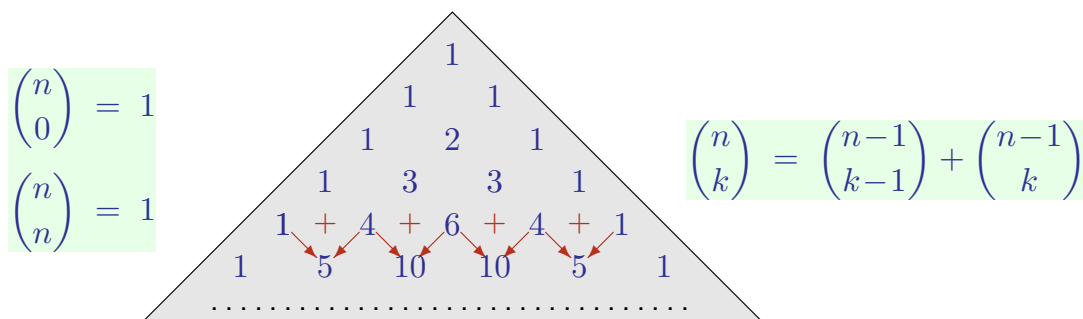
```
n == 30
k == 10
newt(30, 10) == 30045015
```

OK!

Trójkąt Pascala



Blaise Pascal
1623–1662



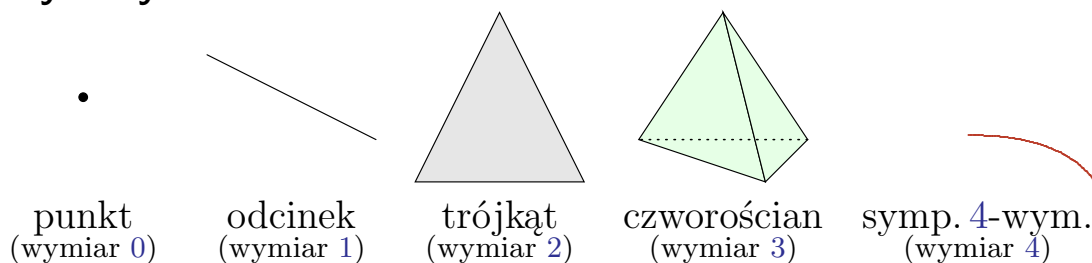
Trójkąt Pascala a sympleksy foremne

Niby-definicja:

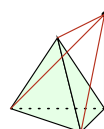
Sympleks n -wymiarowy —

wielościán wymiaru n o minimalnej liczbie wierzchołków.

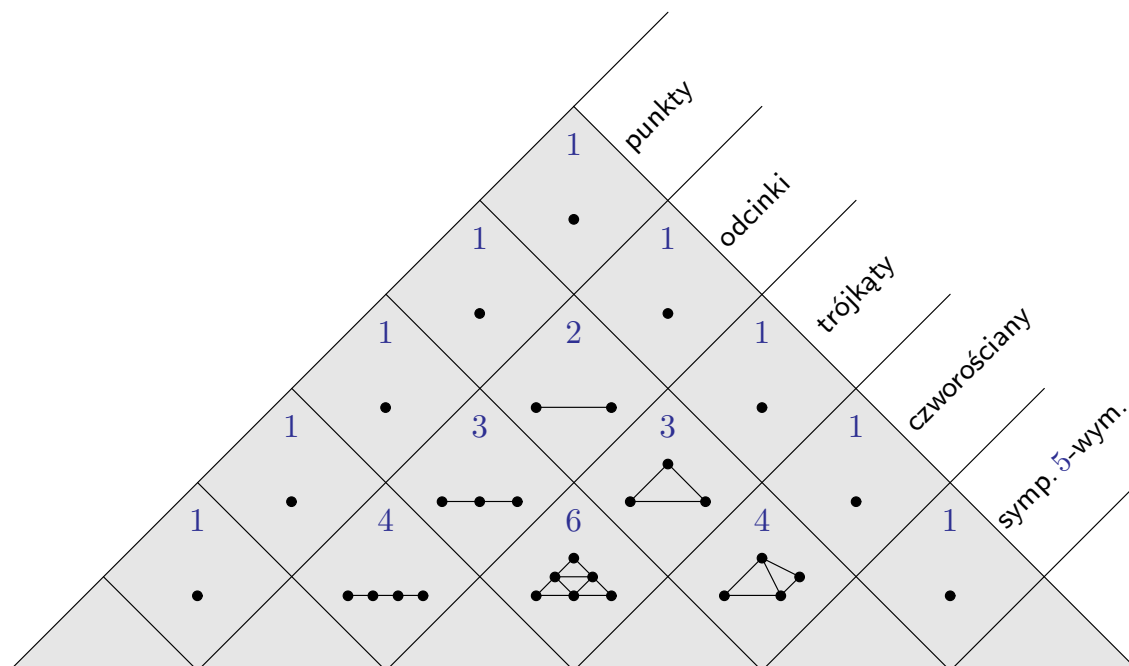
Przykłady:



umieścić czworościan w 3-wymiarowej przestrzeni
wybrać jakiś punkt **poza tą przestrzenią**
każdy wierzchołek czworościanu połączyć odcinkiem z tym punktem

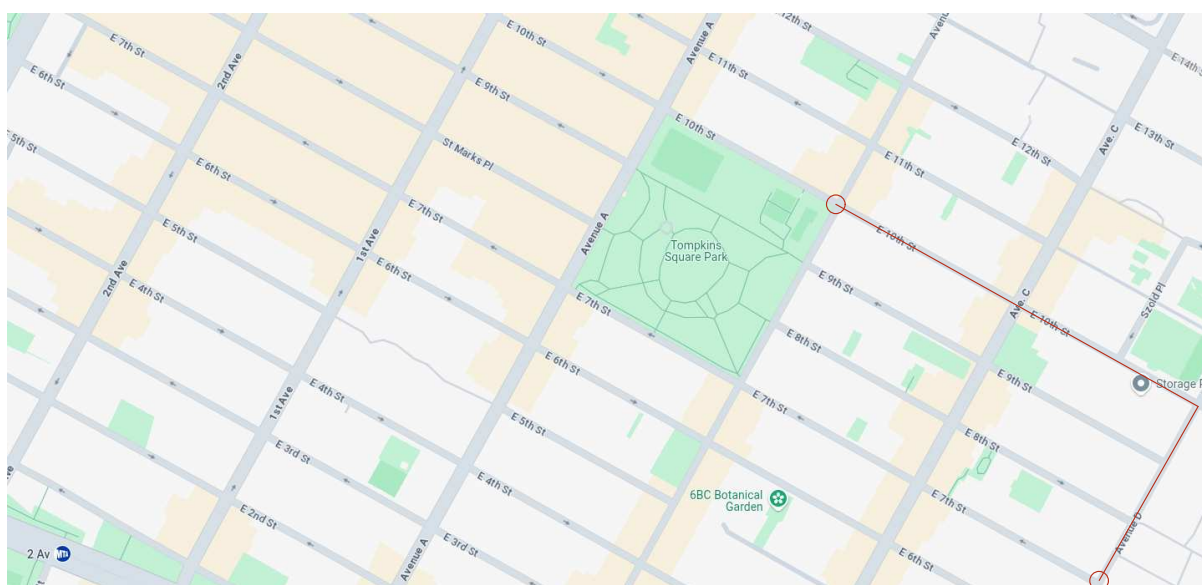


Trójkąt Pascala a sympleksy foremne

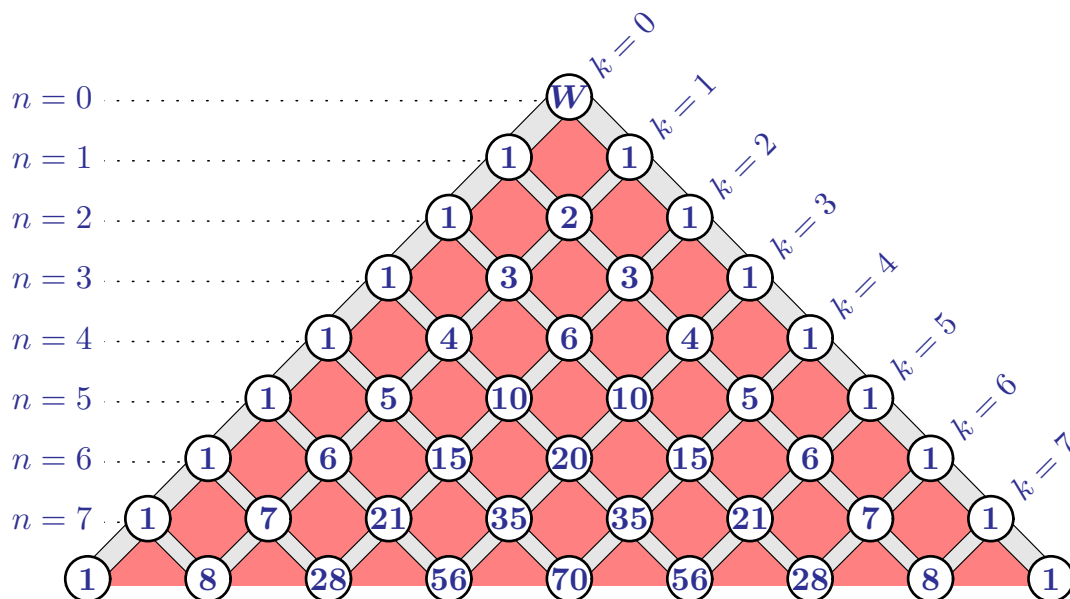


Trójkąt Pascala a drogi w nudnym mieście

Manhattan, New York, USA



Trójkąt Pascala a drogi w nudnym mieście

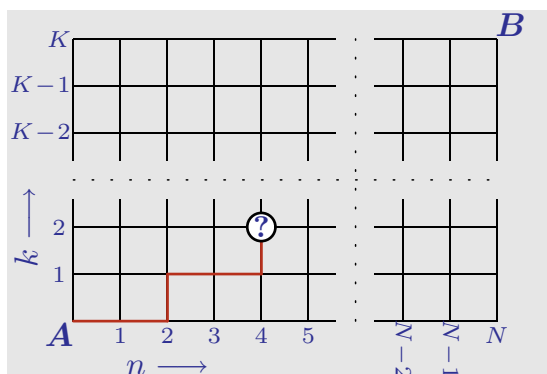
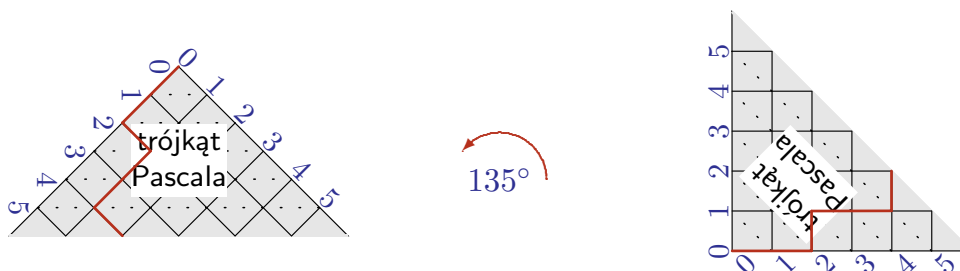


Ile **najkrótszych** dróg od wierzchołka **W** trójkąta do danego skrzyżowania?

$D(n, k)$ — liczba dróg od **W** do skrzyżowania w pkcie (n, k) :

$$D(n, k) = D(n-1, k-1) + D(n-1, k) \quad D(n, 0) = D(n, n) = 1$$

Trójkąt Pascala a najkrótsze drogi w kracie



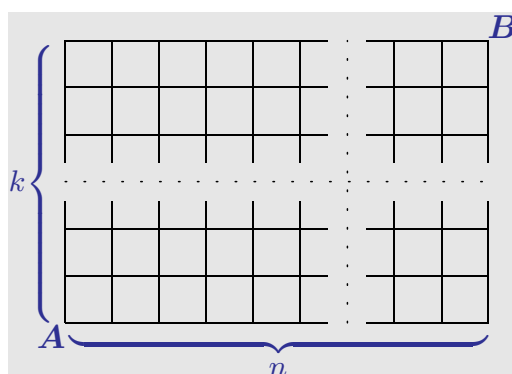
$$k = 0 \vee n = 0 \Rightarrow$$

$$D(n, k) = 1$$

$$0 < k < n \Rightarrow$$

$$D(n, k) = D(n-1, k) + D(n, k-1)$$

Trójkąt Pascala a najkrótsze drogi w kracie



Twierdzenie:

W kracie o wymiarach $n \times k$ (jak na rysunku) najkrótszych dróg od lewego dolnego rogu A do prawego górnego rogu B jest $\binom{n+k}{k}$.

Trójkąt Pascala a najkrótsze drogi w kracie

Twierdzenie:

Naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

jest tyle, co najkrótszych dróg od lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu w kracie $n \times k$, czyli $\binom{n+k}{k}$.

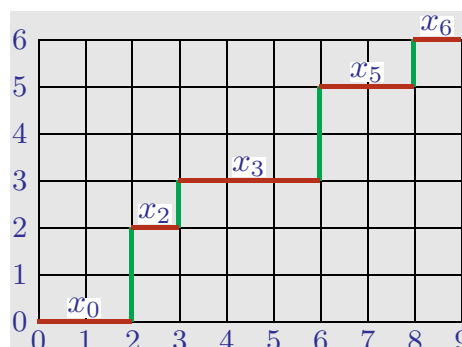
Dowód: (bardzo nieformalny)

Każdemu rozwiązaniu odpowiada dokładnie jedna droga; np.

$$n = 9, k = 6$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} = 9$$



□

Liczba rozwiązań równania

Przykład:

Ile jest naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 = 2 \quad ?$$

Z twierdzenia wynika $\binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

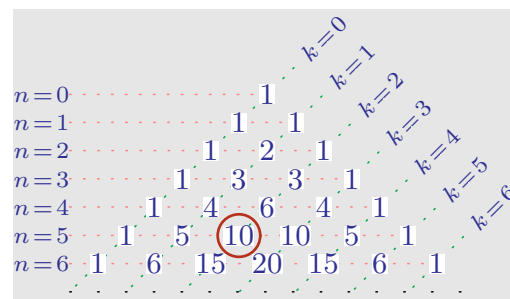
$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$



Przykład:

Ile jest naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 = 3 \quad ?$$

Z twierdzenia wynika $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bullet \begin{matrix} x_0 = 3 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Liczba rozwiązań równania

Przykład:

A ile jest naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 = 6$$

takich, że $\begin{cases} x_0 \geq 2 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \quad ?$

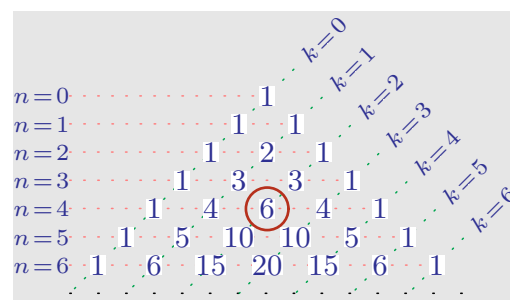
— tyle, co naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 = 6 - 2 - 1 - 1$$

czyli równania

$$x_0 + x_1 + x_2 = 2$$

a więc $\binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$



- $x_0 = 2+0, x_1 = 1+0, x_2 = 1+2$
- $x_0 = 2+0, x_1 = 1+1, x_2 = 1+1$
- $x_0 = 2+0, x_1 = 1+2, x_2 = 1+0$
- $x_0 = 2+1, x_1 = 1+1, x_2 = 1+0$
- $x_0 = 2+1, x_1 = 1+0, x_2 = 1+1$
- $x_0 = 2+2, x_1 = 1+0, x_2 = 1+0$

Liczba rozwiązań równania

Twierdzenie: (uogólnienie poprzedniego przykładu)

Naturalnych rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad \text{takich, że} \quad \begin{cases} x_0 \geq n_0 \\ x_1 \geq n_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_k \geq n_k \end{cases}$$

jest $\binom{n - n_0 - n_1 - \dots - n_k + k}{k}$.

Dowód:

Każdemu rozwiązaniu równania

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

z podanymi ograniczeniami na zmienne x_i odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie równania

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - n_0 - n_1 - \dots - n_k$$

bez ograniczeń; ta odpowiedniość ma postać

$$y_i = x_i - n_i \quad \text{dla} \quad i \in [0..k].$$

□

Liczba rozwiązań równania

Przykład:

Na ile sposobów można włożyć 20 identycznych ulotek do 10 przegródek, żeby w każdej znalazła się co najmniej jedna ulotka?

Na tyle, ile jest rozwiązań naturalnoliczbowych równania

$$\sum_{i=0}^9 x_i = 20 \quad \text{spełniających} \quad x_i \geq 1 \quad \text{dla} \quad i \in [0..9]$$

czyli tyle, co rozwiązań naturalnoliczbowych równania

$$\sum_{i=0}^9 x_i = 20 - 10 = 10$$

czyli

$$\begin{aligned} \binom{10+9}{9} &= \binom{19}{9} = \frac{19!}{9! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{9!} \\ &= \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 22 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 92\,378 \end{aligned}$$

Liczba rozwiązań nierówności

Sumowanie wsp. Newtona po dolnych indeksach:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

Twierdzenie: (sumowanie po górnych indeksach)

$$\sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Dowód: (indukcja po n)

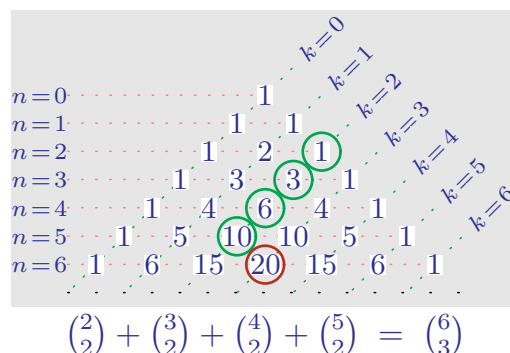
Przyp. bazowy $n = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 \binom{k+i}{k} &= \binom{k+0}{k} = \binom{k}{k} = 1 \\ &= \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+0+1}{k+1} \end{aligned}$$

Krok ind. $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{k+i}{k} &= \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} + \binom{k+(n+1)}{k} \quad (\text{z zał. ind.}) \\ &= \binom{k+n+1}{k+1} + \binom{k+n+1}{k} = \binom{k+n+2}{k+1} \end{aligned}$$

□



Liczba rozwiązań nierówności

Przykład:

Ile jest naturalnych rozwiązań nierówności

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n ?$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{liczba nat. rozw. nierówn.} \\ x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n \end{array} \right) &= \sum_{i=0}^n \left(\begin{array}{c} \text{liczba nat. rozw. równ.} \\ x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k = i \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} = \binom{k+n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Przykład:

Ile jest naturalnych rozwiązań nierówności

$$x_0 + x_1 + x_2 \leq 3 ?$$

$$\binom{2+3+1}{2+1} = \binom{6}{3} = 20$$

(0, 0, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 0)	(1, 2, 0)
(0, 0, 1)	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(2, 0, 0)
(0, 0, 2)	(0, 2, 0)	(1, 0, 2)	(2, 0, 1)
(0, 0, 3)	(0, 2, 1)	(1, 1, 0)	(2, 1, 0)
(0, 1, 0)	(0, 3, 0)	(1, 1, 1)	(3, 0, 0)

Liczenie różnych rzeczy

Przykład:

W ilu liczbach z przedziału $[0..999]$ suma cyfr wynosi 20?

Można użyć cyfr od 2 do 9 — jeśli któraś cyfra < 2 , to suma cyfr < 20 .

Dwie cyfry wyznaczają jednoznacznie trzecią.

Wyliczenie cyfry k
dla znanych cyfr i i j

$i \backslash j$	2	3	4	5	6	7	8	9
2								9
3							9	8
4						9	8	7
5					9	8	7	6
6				9	8	7	6	5
7			9	8	7	6	5	4
8		9	8	7	6	5	4	3
9	9	8	7	6	5	4	3	2

dla $i = 2$: 1 liczba

dla $i = 3$: 2 liczby

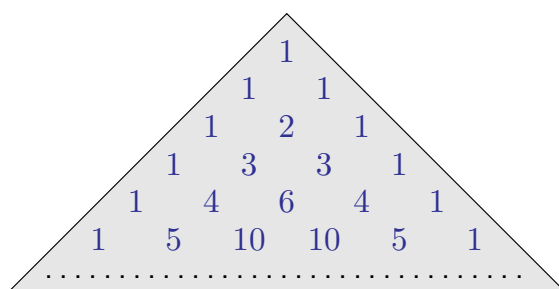
dla $i = 4$: 3 liczby

.....

dla $i = 9$: 8 liczb

razem: $\frac{(1+8)8}{2} = 36$ liczb

Trójkąt Pascala a potęgi sum



$$(x+y)^0 = 1 x^0 y^0$$

$$(x+y)^1 = 1 x^1 y^0 + 1 x^0 y^1$$

$$(x+y)^2 = 1 x^2 y^0 + 2 x^1 y^1 + 1 x^0 y^2$$

$$(x+y)^3 = 1 x^3 y^0 + 3 x^2 y^1 + 3 x^1 y^2 + 1 x^0 y^3$$

$$(x+y)^4 = 1 x^4 y^0 + 4 x^3 y^1 + 6 x^2 y^2 + 4 x^1 y^3 + 1 x^0 y^4$$

$$(x+y)^5 = 1 x^5 y^0 + 5 x^4 y^1 + 10 x^3 y^2 + 10 x^2 y^3 + 5 x^1 y^4 + 1 x^0 y^5$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Współczynniki dwumianowe a potęgi sum

Twierdzenie:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

Dowód: (indukcja po n)

Przyp. bazowy — $n = 0$:

$$(x + y)^0 = 1 = 1x^0y^0 = \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} x^{0-i} y^i$$

Krok ind. — $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n \cdot (x + y) \quad (\text{z zał. ind.}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \right) \cdot (x + y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n+1-i} y^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n+1-i} y^i + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^j \quad (\text{nowy ind. sumowania: } j = i+1) \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n+1-i} y^i + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n+1-i} y^i + \binom{n+1}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) x^{n+1-i} y^i + \binom{n+1}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i + \binom{n+1}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i \end{aligned}$$

□

Zasada szufladkowa

Twierdzenie:

- (a) jeśli w n szufladkach rozmieścimy **więcej niż** $k \cdot n$ przedmiotów, to w którejś szufladce znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów;
- (b) jeśli suma skończonych zbiorów $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ ma moc **większą niż** $k \cdot n$, to moc któregoś z tych zbiorów przekracza k ;
- (c) nie istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru skończonego do innego zbioru o mniejszej mocy.

Uwaga:

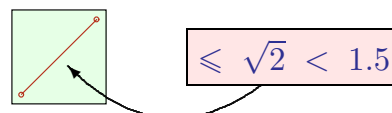
To jest „niekonstruktywne twierdzenie egzystencjalne”:
na jego mocy **wiadomo**, że taka szufladka istnieje,
ale **nie wiadomo** która.

Zasada szufladkowa

Wnioski:

- tu na sali przynajmniej dwie osoby urodziły się **w tym samym dniu tygodnia**;
- co najmniej dwaj mieszkańcy tego województwa mają dokładnie **tyle samo włosów na głowie** (maksymalna liczba włosów na jednej głowie: 500 tys.; ludność województwa warm.-maz.: 1.3 mln);
- jeśli w kwadracie o boku 4 umieścimy 17 punktów, to znajdą się dwa punkty o odległości mniejszej niż 1.5.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Liczenie różnych rzeczy, c.d.

Prawa przeliczania:

- (a) liczba k -elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru n -elementowego: n^k

Np.: ile różnych liczb dwójkowych można zapisać w 1 bajcie (czyli 8 bitach)?

$$n = 2, k = 8 \text{ — więc } n^k = 2^8 = 256$$

Np.: a gdyby te „bity” miały po 3 możliwe wartości?

$$n = 3, k = 8 \text{ — więc } n^k = 3^8 = 6561$$

Np.: ile różnych ciągów wyników można uzyskać przy 8 rzutach sześcienną kostką?

$$n = 6, k = 8 \text{ — więc } n^k = 6^8 = 1\,679\,616$$



Liczenie różnych rzeczy, c.d.

Prawa przeliczania:

(b) liczba k -elementowych ciągów o **różnych** wyrazach ze zbioru

$$n\text{-elementowego: } \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Np.: w pudełku mamy 10 kul ponumerowanych liczbami od 0 do 9; wyciągamy po kolei 5 z nich; ile różnych ciągów kul możemy w ten sposób uzyskać?

$$n = 10, k = 5 \text{ — więc } \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$$

Np.: ze zbiornika z 49 numerowanymi kulami maszyna losująca wypuszcza po kolei 6 kul; ile różnych ciągów kul można w ten sposób uzyskać?

$$n = 49, k = 6 \text{ — więc } \binom{49}{6} \cdot 6! = 10\,068\,347\,520$$

Uwaga:

szanse trafienia szóstki w Lotto są **większe** niż $\frac{1}{10\,068\,347\,520}$;
 mnie wyszło $\frac{1}{13\,983\,816} \approx 7.15 \cdot 10^{-8}$.

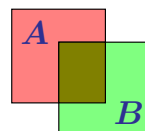
Liczenie różnych rzeczy, c.d.

$|X|$ — moc zbioru X

Prawa przeliczania:

(c) dla zbiorów A i B mamy:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Np.: ile liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 999\}$ dzieli się przez 2 lub przez 3?

$$A = \{0, 2, 4, \dots, 998\} \quad \text{— podzielne przez 2} \quad |A| = 500$$

$$B = \{0, 3, 6, \dots, 999\} \quad \text{— podzielne przez 3} \quad |B| = 334$$

$$A \cap B = \{0, 6, 12, \dots, 996\} \quad \text{— podzielne przez 6} \quad |A \cap B| = 167$$

$$\text{więc } |A \cup B| = 500 + 334 - 167 = 667$$

Np.: na roku jest 100 studentów; z nich 60 zapisało się na basen, 40 na piłkę nożną a 20 na oba zajęcia; ilu nie zapisało się na nic?

$$\text{Zapisani na coś w ogóle: } 60 + 40 - 20 = 80 .$$

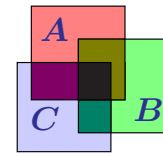
$$\text{Niezapisani: } 100 - 80 = 20 .$$

Liczenie różnych rzeczy, c.d.

Prawa przeliczania:

(d) dla zbiorów A , B i C mamy:

$$\begin{aligned}
 |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\
 &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
 &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
 &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\
 &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
 \end{aligned}$$



Np.: ile liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 999\}$ dzieli się przez 2, 3 lub 5?

$$\begin{array}{ll}
 A = \{0, 2, 4, \dots, 998\} & |A| = 500 \\
 B = \{0, 3, 6, \dots, 999\} & |B| = 334 \\
 C = \{0, 5, 10, \dots, 995\} & |C| = 200 \\
 A \cap B = \{0, 6, 12, \dots, 996\} & |A \cap B| = 167 \\
 A \cap C = \{0, 10, 20, \dots, 990\} & |A \cap C| = 100 \\
 B \cap C = \{0, 15, 30, \dots, 990\} & |B \cap C| = 67 \\
 A \cap B \cap C = \{0, 30, 60, \dots, 990\} & |A \cap B \cap C| = 34
 \end{array}$$

więc $|A \cup B \cup C| = 500 + 334 + 200 - 167 - 100 - 67 + 34 = 734$