

Stefan Sokołowski

MATEMATYKA DYSKRETNA

wykład 9

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2024/2025

Wykład 9, str. 1

Grafy

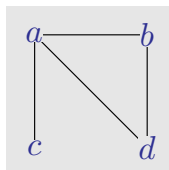
Definicja:

Graf (nieskierowany) — para $G = \langle V, E \rangle$

- V — dowolny zbiór **wierzchołków** (*vertices*);
- E — zbiór **krawędzi** (*edges*); pojedyncza krawędź to dwuelementowy zbiór wierzchołków.

Przykład:

$$G = \left\langle \overbrace{\{a, b, c, d\}}^V, \overbrace{\{\{a, b\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\}\}}^E \right\rangle$$



Krawędzie muszą być zbiorami **naprawdę** 2-elementowymi; $\{v, v\}$ nie jest krawędzią.

Grafy



$$G = \left\langle \begin{array}{l} \{ \text{Białystok, Bydgoszcz, Elbląg, Gdańsk, Katowice, Kraków, Lublin,} \\ \text{Łódź, Olsztyn, Poznań, Rzeszów, Szczecin, Warszawa, Wrocław} \} , \\ \{ \{ \text{Elbląg, Gdańsk} \} , \{ \text{Elbląg, Olsztyn} \} , \{ \text{Olsztyn, Warszawa} \} , \\ \{ \text{Gdańsk, Szczecin} \} , \{ \text{Gdańsk, Bydgoszcz} \} , \{ \text{Bydgoszcz, Poznań} \} , \dots \} \end{array} \right\rangle$$

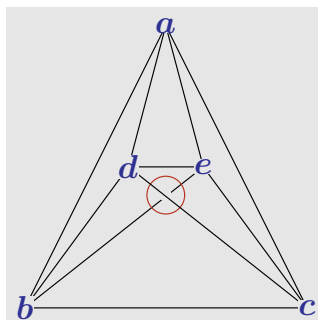
Grafy — podstawy

Rysunek jest sprawą drugorzędną...

Nie każdy graf daje się narysować na płaszczyźnie bez przecinających się krawędzi...

Przykład:

$$G = \left\langle \begin{array}{l} \{ a, b, c, d, e \} , \\ \{ \{ a, b \} , \{ a, c \} , \{ a, d \} , \{ a, e \} , \{ b, c \} , \{ b, d \} , \{ b, e \} , \{ c, d \} , \{ c, e \} , \{ d, e \} \} \end{array} \right\rangle$$



Takie grafy są pełnoprawne; rysunek jest tylko nieistotną poglądową ilustracją.

Grafy — podstawy

Definicja:

Dwa wierzchołki w grafie są **sąsiednie**, jeśli łączy je krawędź.

Przykład:



a i j — sąsiednie

Definicja:

Wierzchołek $v \in V$ jest **incydentny** z krawędzią $e \in E$, jeśli $v \in e$.

Przykład:

W powyższym grafie

c jest incydentny z $\{a, c\}$

a jest incydentny z $\{a, c\}$

a jest incydentny z $\{j, a\}$

.....

Grafy — podstawy

Definicja:

Stopień wierzchołka $v \in V$ w grafie $G = \langle V, E \rangle$ to liczba jego sąsiadów:

$$d_G(v) \stackrel{\text{def}}{=} |N_G(v)| \quad \text{gdzie}$$

$$N_G(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$$

Definicja:

Wierzchołek stopnia 0 (nie mający sąsiadów) nazywamy **izolowanym**.

Twierdzenie: (lemat o uściskach dłoni)

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$$

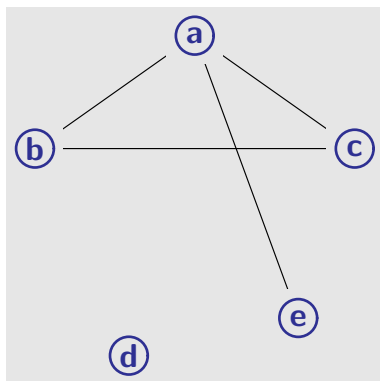
— czyli suma stopni wszystkich wierzchołków to 2-krotność liczby krawędzi.

Grafy — podstawy

Wniosek:

Wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta ilość.

Przykład:



	stopień	parzysty?
<i>a</i>	3	nie
<i>b</i>	2	tak
<i>c</i>	2	tak
<i>d</i>	0	tak
<i>e</i>	1	nie
suma: 8		2 nieparzyste

Grafy — podstawy

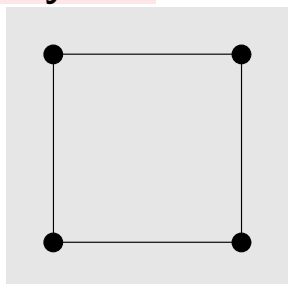
Definicja:

Graf $G = \langle V, E \rangle$ jest r -regularny, jeśli

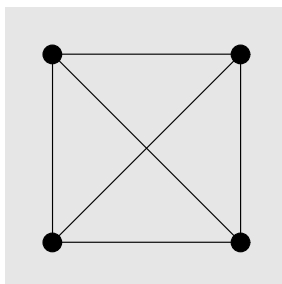
$$\forall_{v \in V} d_G(v) = r$$

czyli jeśli wszystkie jego wierzchołki mają stopień r .

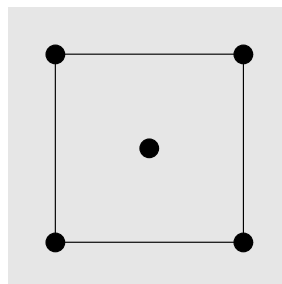
Przykład:



graf 2-regularny



graf 3-regularny



graf nie r -regularny
dla żadnego r

Grafy — podstawy

Definicja:

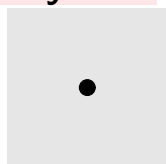
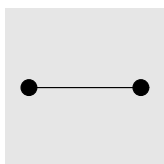
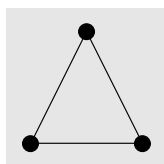
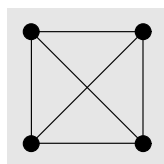
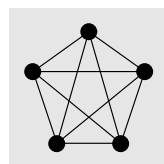
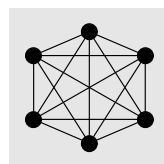
Graf $G = \langle V, E \rangle$ jest **pełny**, jeśli

$$\forall_{v,u \in V} \{v, u\} \in E$$

czyli jeśli każde jego dwa różne wierzchołki łączy krawędź.

Oznaczenie: K_n graf pełny o n wierzchołkach.

Przykład:


 K_1

 K_2

 K_3

 K_4

 K_5

 K_6

Twierdzenie:

Liczba krawędzi grafu pełnego K_n wynosi

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafy — podstawy

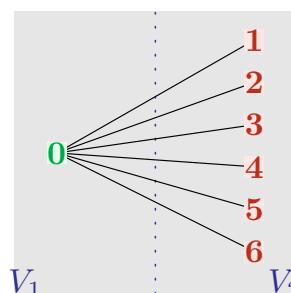
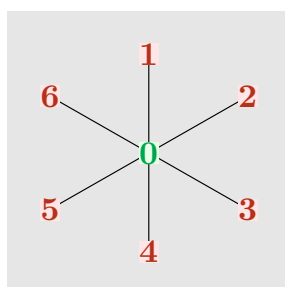
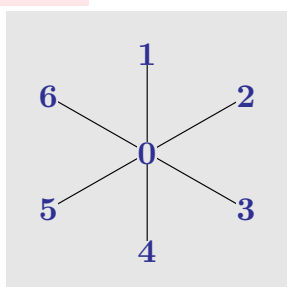
Definicja:

Graf $G = \langle V, E \rangle$ jest **dwudzielny**, jeśli jego zbiór wierzchołków V można podzielić na dwa zbiory rozłączne V_1 i V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$),

takie że $\left\{ \begin{array}{l} \text{żadne dwa wierzchołki w } V_1 \\ \text{ani} \\ \text{żadne dwa wierzchołki w } V_2 \end{array} \right\}$ nie są sąsiednie

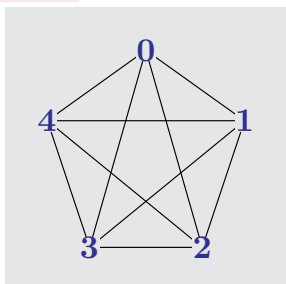
czyli jeśli da się pomalować wierzchołki dwoma kolorami tak, że każda krawędź łączy wierzchołki różnych kolorów.

Przykład:



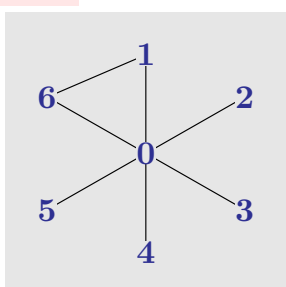
Grafy — podstawy

Przykład:



nie dwudzielny

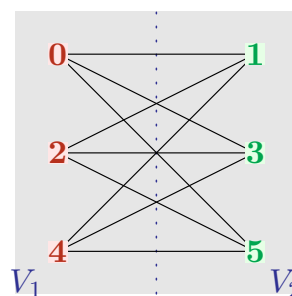
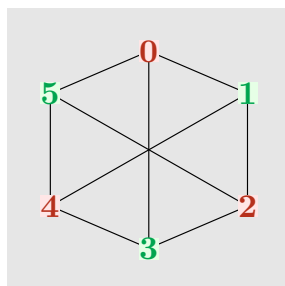
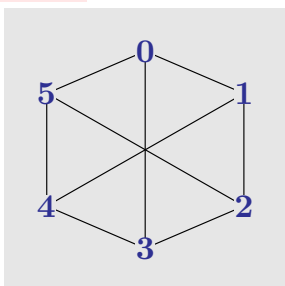
Przykład:



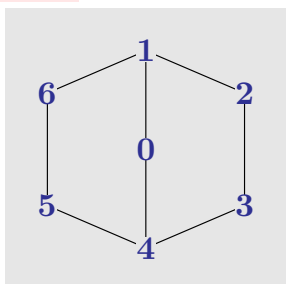
nie dwudzielny

Grafy — podstawy

Przykład:



Przykład:



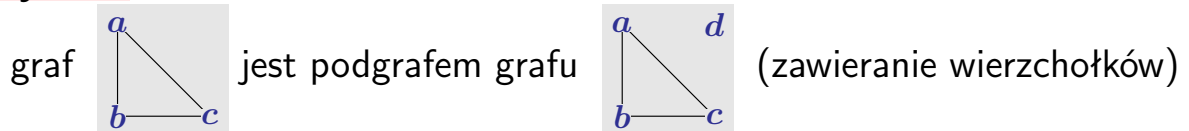
nie dwudzielny

Grafy — podstawy

Definicja:

Podgraf grafu $G = \langle V, E \rangle$ to dowolny taki graf $G' = \langle V', E' \rangle$, że
 $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$

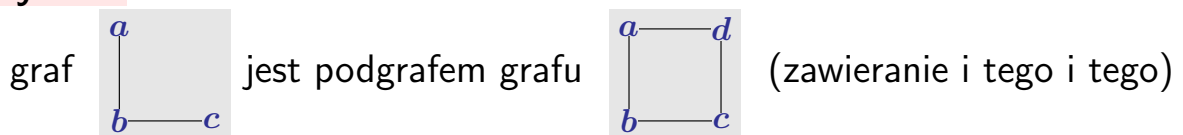
Przykład:



Przykład:



Przykład:



Grafy — podstawy

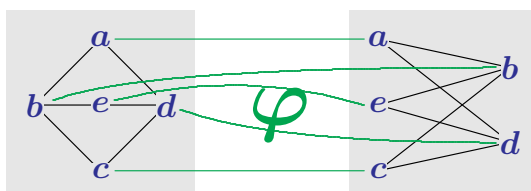
Definicja:

Graf $G = \langle V, E \rangle$ jest **izomorficzny** z grafem $G' = \langle V', E' \rangle$ jeśli istnieje bijekcja (czyli funkcja różnowartościowa i „na”) $\varphi : V \rightarrow V'$ zachowująca krawędzie:

$$\forall_{v,u \in V} (\{v, u\} \in E \iff \{\varphi(v), \varphi(u)\} \in E')$$

Przykład:

Izomorficzne:



Definicja:

ℓ_n — liczba nieizomorficznych grafów o n wierzchołkach

Grafy — podstawy

n	grafy o n wierzchołkach i m krawędziach							ℓ_n
	0	1	2	3	4	5	6	
1								1
2								2
3								4
4				  	  			11

Drogi w grafie

Definicja:

Droga — taki ciąg $(v_0, v_1, \dots, v_d)$ wierzchołków, że $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{d-1}, v_d\}$ są krawędziami.

v_0 — **początek** drogi

v_d — **koniec** drogi

d — **długość** drogi.

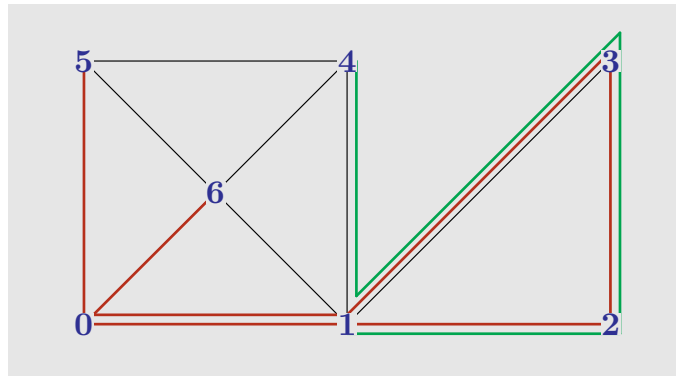
Droga jest **zamknięta** $\iff v_d = v_0$.

Droga jest **prosta** $\iff$ żadna krawędź nie występuje w niej dwukrotnie
(nie idziemy ponownie po tej samej krawędzi)

Droga jest **ścieżką** $\iff$ żaden wierzchołek poza (być może) $v_0 = v_d$ nie występuje w niej dwukrotnie
(nie przechodzimy ponownie przez ten sam wierzchołek)

Drogi w grafie

Przykład:



droga — (czyli $(5, 0, 1, 2, 3, 1, 0, 6)$) *nie jest prosta*,
bo dwukrotnie przechodzi przez krawędź $\{0, 1\}$

droga — (czyli $(4, 1, 3, 2, 1)$) *jest prosta*, ale *nie jest ścieżką*,
bo dwukrotnie odwiedza wierzchołek 1 , który nie jest jej początkiem i
końcem jednocześnie

Drogi w grafie

Definicja:

Cykl — droga prosta zamknięta długości ≥ 2 .

Cykl elementarny — cykl będący ścieżką.

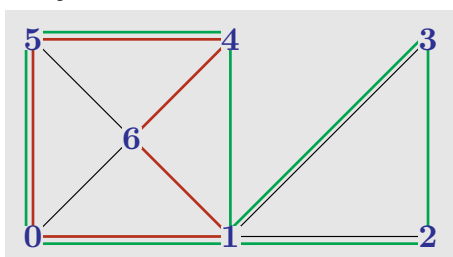
Czyli cykl

- wychodzi z wierzchołka i do niego wraca,
- nie może dwukrotnie przechodzić przez żadną krawędź,
- ale przez wierzchołek może.

A cykl elementarny dodatkowo

- nie odwiedza dwukrotnie żadnego wierzchołka innego niż początek i koniec.

Przykład:



droga — (czyli $(0, 1, 6, 4, 5, 0)$) *jest cyklem elementarnym*

droga — (czyli $(0, 1, 2, 3, 1, 4, 5, 0)$) *jest cyklem*, ale *nie elementarnym*, bo dwukrotnie odwiedza wierzchołek 1 , który nie jest początkiem i końcem jednocześnie

Drogi w grafie

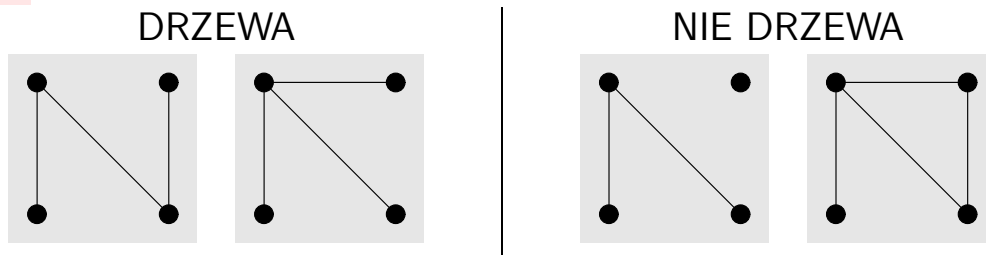
Definicja:

Graf jest **spójny** $\iff$ każde jego dwa wierzchołki łączy jakaś droga.

Definicja:

Drzewo — graf spójny i acykliczny (czyli nie zawierający cyklu).

Przykład:

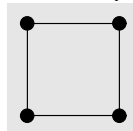


Prosty fakt:

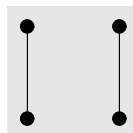
drzewo ma krawędzi o 1 mniej niż wierzchołków

Drogi w grafie

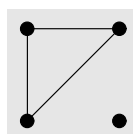
Przykład: (spójny nie musi być drzewem)



Przykład: (acykliczny nie musi być drzewem)



Przykład: (mający krawędzi o 1 mniej niż wierzchołków nie musi być drzewem)



Drogi w grafie

Twierdzenie:

Dla grafu G następujące warunki są równoważne:

- (a) G jest drzewem;
- (b) każde dwa wierzchołki w G łączy **dokładnie jedna** ścieżka;
- (c) G jest spójny i ma krawędzi o 1 mniej niż wierzchołków;
- (d) G jest acykliczny i ma krawędzi o 1 mniej niż wierzchołków;
- (e) G jest acykliczny, a po dodaniu 1 krawędzi ma dokładnie jeden cykl.

Wniosek:

Jeśli G jest drzewem nietrywialnym (czyli ma co najmniej 2 wierzchołki), to ma co najmniej dwa wierzchołki stopnia 1.

Dowód: (wniosku)

Lemat o uściskach dłoni $\Rightarrow \sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E| = 2 \cdot (|V| - 1) = 2 \cdot |V| - 2$
 W nietrywialnym drzewie każdy wierzchołek ma stopień ≥ 1 . Gdyby $|V| - 1$ wierzchołków miało stopień ≥ 2 , to

$$2 \cdot |V| - 2 = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2 \cdot (|V| - 1) + 1 = 2 \cdot |V| - 1$$

— sprzeczność.

□

w drzewie:
krawędzi o 1 mniej
niż wierzchołków

Grafy eulerowskie

Definicja:

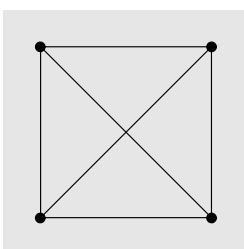
Graf G jest **eulerowski** $\iff$ istnieje cykl zawierający *wszystkie* jego krawędzie.

Graf G jest **semieulerowski** $\iff$ istnieje droga prosta zawierająca *wszystkie* jego krawędzie.

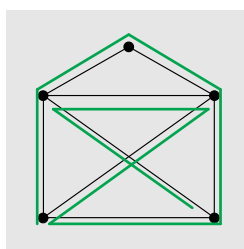
Ta droga prosta w grafie semieulerowskim nie musi kończyć się tam, gdzie się zaczęła.

Przykład:

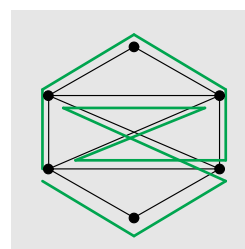
niesemieulerowski:



semieulerowski
nieeulerowski:

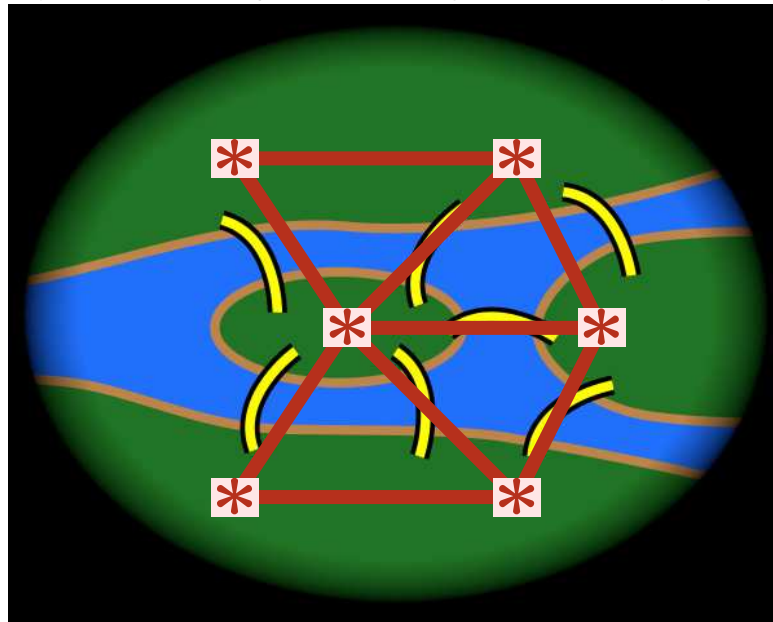


eulerowski:



Mosty królewieckie (Euler)

Czy da się przejść przez **wszystkie** mosty, przez każdy **tylko raz**?



Inaczej:

Czy nałożony na nie czerwony graf jest **semieulerowski**?

Mosty królewieckie (Euler)

Twierdzenie: (Euler)

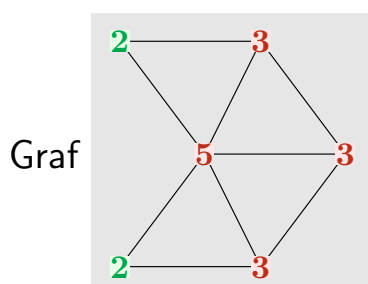
Spójny graf jest semieulerowski $\iff$ najwyżej dwa jego wierzchołki mają nieparzysty stopień.

Spójny graf jest eulerowski $\iff$ wszystkie jego wierzchołki mają parzysty stopień.

Wniosek:

Zagadnienie mostów królewieckich nie ma rozwiązania.

Dowód: (wniosku)



ma aż cztery wierzchołki o nieparzystym stopniu.

□

Grafy ważone

Definicja:

Graf ważony — trójka $G = \langle V, E, w \rangle$

- $\langle V, E \rangle$ — graf
- $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ — **wagi** krawędzi

Wagi mogą w praktyce oznaczać odległości, albo czas, itp.

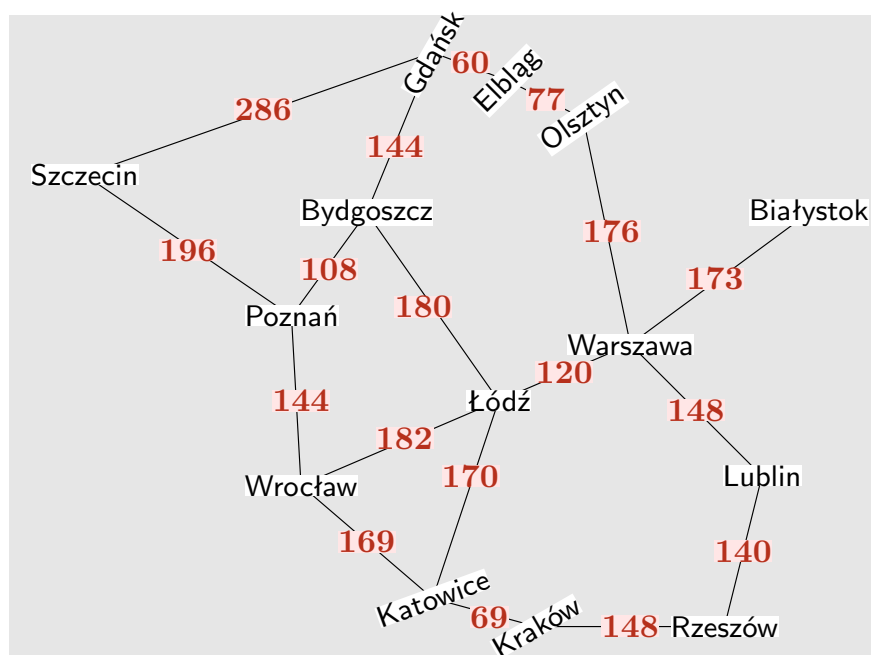
Definicja:

Waga drogi — suma wag wszystkich krawędzi tej drogi

Wiele zagadnień sprowadza się do znalezienia drogi o minimalnej wadze między dwoma wierzchołkami grafu.

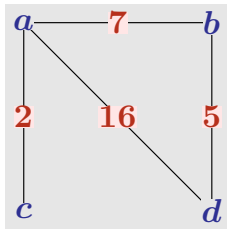
Grafy ważone

Przykład:



Grafy ważone

Przykład:

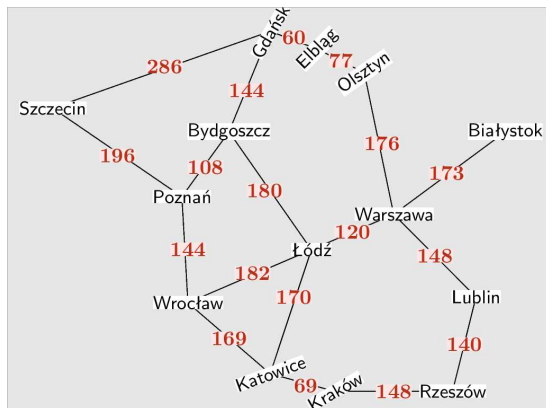


waga drogi (c, a, d) : 18

waga drogi (c, a, b, d) : 14

warto jechać przez b , a nie bezpośrednio...

Przykład:



(Gdańsk, Elbląg, Olsztyn, Warszawa, Lublin, Rzeszów, Kraków) — 749 km

(Gdańsk, Elbląg, Olsztyn, Warszawa, Łódź, Katowice, Kraków) — 672 km

(Gdańsk, Bydgoszcz, Łódź, Katowice, Kraków) — 563 km

(Gdańsk, Bydgoszcz, Poznań, Wrocław, Katowice, Kraków) — 634 km

Grafy ważone — algorytm Dijkstry

Algorytm Dijkstry

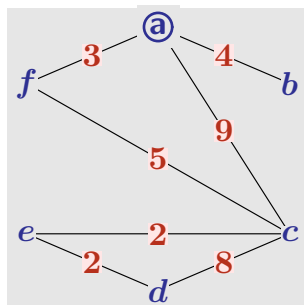
- znajduje drogi o najmniejszej wadze z wybranego wierzchołka grafu do wszystkich pozostałych wierzchołków;
- opracowany w latach 1950-tych;
- ma wiele zastosowań; m.in. w nawigacji GPS.



Edsger Wybe Dijkstra
1930–2002

Grafy ważone — algorytm Dijkstry

graf:



odl. bezpośrednie:

	a	b	c	d	e	f
a		4	9			3
b	4					
c	9			8	2	5
d			8		2	
e			2	2		
f	3		5			

tymczasowe odległości od a:

c	d	e
8	$+\infty$	$+\infty$

minimum

v:

c
8

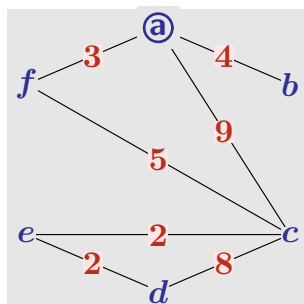
wyliczone odległości od a:

a	b	c	d	e	f
0	4	8			3

 $c \xrightarrow{9} a$: nic, bo a już obsługiwane $c \xrightarrow{8} d$: $8 + 8 < +\infty$ więc 16 do d $c \xrightarrow{2} e$: $8 + 2 < +\infty$ więc 10 do e

Grafy ważone — algorytm Dijkstry

graf:



odl. bezpośrednie:

	a	b	c	d	e	f
a		4	9			3
b	4					
c	9			8	2	5
d			8		2	
e			2	2		
f	3		5			

tymczasowe odległości od a:

--	--	--

minimum

v:

--

wyliczone odległości od a:

a	b	c	d	e	f
0	4	8	12	10	3

pusto, więc
KONIEC
 tu są wyniki

Grafy ważone — algorytm Dijkstry

Sam graf może być reprezentowany przez *macierz sąsiedztwa* (jak wyżej), ale lepiej przez *listy sąsiedztw*.

Informacje opisane wyżej jako „**tymczasowe odległości**” zwykle implementuje się przy pomocy kolejki z priorytetami. Wierzchołek o minimalnej wadze znajduje się na jej początku.

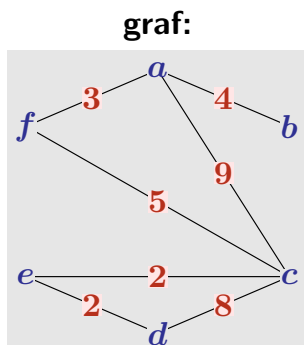
Łatwo wzbogacić ten algorytm tak, żeby **wskazywał** drogę o najniższej wadze, a **nie tylko podawał jej wagę**.

Reprezentacje grafu (informatyka)

Macierz sąsiedztwa

— dwuwymiarowa tablica $T \subseteq V \times V$ (czyli indeksowana parami wierzchołków)

$$T[v_1][v_2] = \begin{cases} \text{dla grafu bez wag} & \text{— jeśli } \{v_1, v_2\} \in E, \text{ to } 1; \\ & \text{a jeśli nie, to oznaczenie braku krawędzi} \\ \text{dla grafu z wagami} & \text{— jeśli } \{v_1, v_2\} \in E, \text{ to waga krawędzi;} \\ & \text{a jeśli nie, to oznaczenie braku krawędzi} \end{cases}$$



macierz:

	a	b	c	d	e	f
a		4	9			3
b	4					
c	9			8	2	5
d			8		2	
e			2	2		
f	3		5			

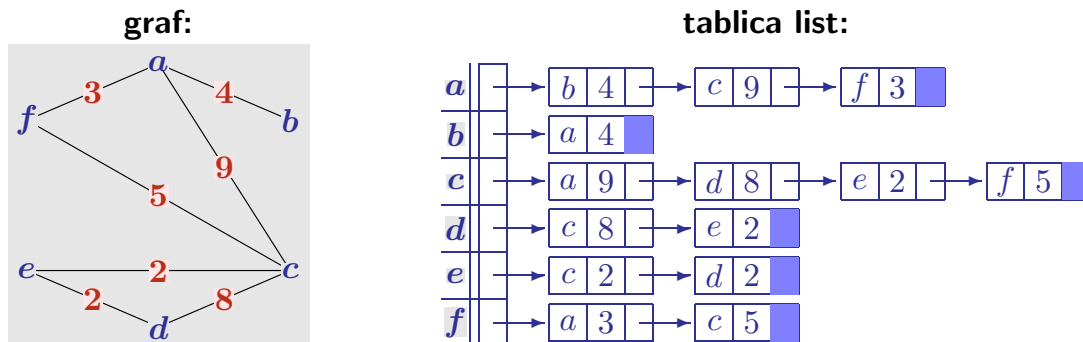
Reprezentacje grafu (informatyka)

Listy sąsiedztw

— tablica indeksowana wierzchołkami

$S[v]$ = lista sąsiadów wierzchołka v

a dla grafu z wagami — lista par (sąsiad, waga krawędzi)



Reprezentacje grafu (informatyka)

Porównanie:

	macierz sąsiedztwa	listy sąsiedztw
redundancja:	symetria: $T[v_1][v_2] = T[v_2][v_1]$	w liście $S[v_1]$ jest para $\langle v_2, k \rangle$ $\iff$ w liście $S[v_2]$ jest para $\langle v_1, k \rangle$
dostęp do krawędzi $\{v_1, v_2\}$:	bezpośrednio dany	wymaga przeszukania listy
znalezienie sąsiadów v:	wymaga przeszukania wiersza	bezpośrednio dane
zajętość pamięci — kiedy warto:	warto w grafach „gęstych” w „rzadkich” wielka macierz wypełniona niczym	warto w grafach „rzadkich” w „gęstych” listy zajmują więcej miejsca niż wiersze macierzy