

Grafy

Stefan Sokołowski

Elbląg, 13 czerwca 2025

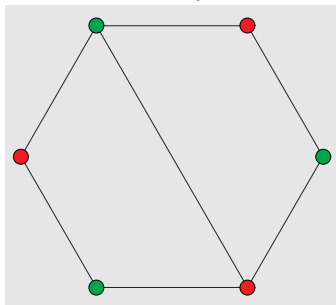
Terminologia grafowa (niezbyt formalnie):

Graf dwudzielny:

zbiór wierzchołków V można podzielić na dwa rozłączne podzbiory $V = V_1 \cup V_2$ t.ż. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i każda krawędź grafu łączy jakiś wierzchołek z V_1 z jakimś z V_2 .

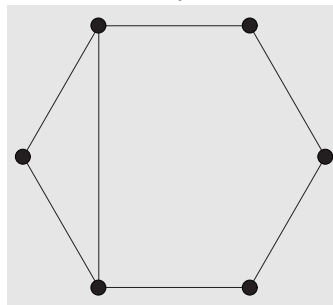
Przykład:

graf nieskierowany dwudzielny:



zielone — zbiór V_1
czerwone — zbiór V_2

graf nieskierowany niedwudzielny:



nie istnieje
takie pokolorowanie

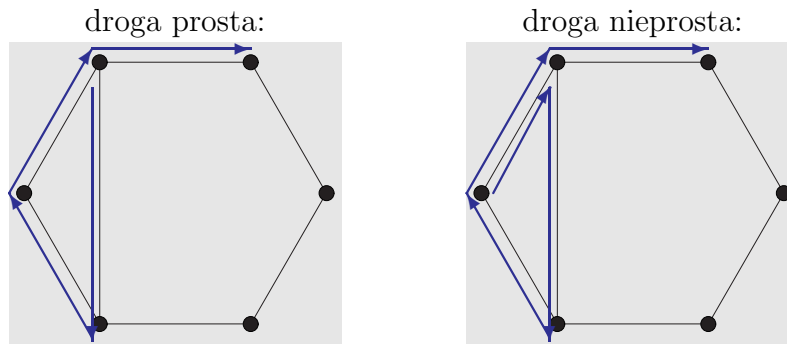
Droga długości k :

ciąg krawędzi $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_k)$ t.ż. początek e_i jest końcem e_{i-1} dla wszystkich $i \in \{1, \dots, k\}$.

Droga jest prosta:

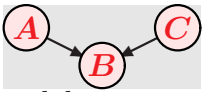
żadna krawędź się w niej nie powtarza.

Przykład:



Graf spójny:

z każdego wierzchołka prowadzi droga do każdego innego wierzchołka.

Uwaga: graf skierowany  nie jest spójny, bo nie ma w nim drogi od *A* do *C* — droga nie może prowadzić „pod prąd” strzałek.

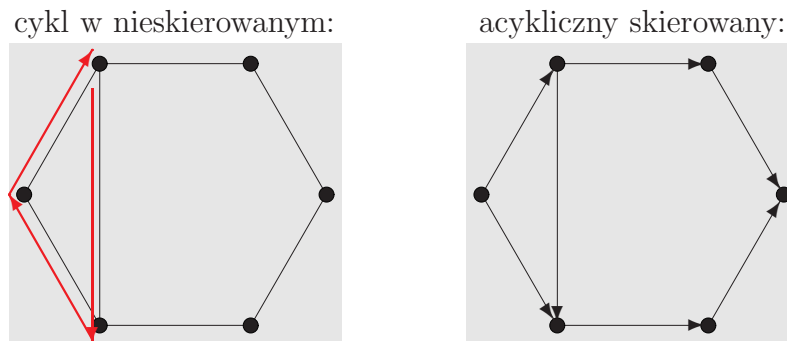
Cykl:

droga prosta o długości niezerowej zamknięta, czyli prowadząca z jakiegoś wierzchołka do niego samego.

Graf acykliczny:

nie ma w nim żadnych cykli.

Przykład:



Graf nieskierowany spójny i acykliczny nazywa się **drzewem** nieskierowanym.

Graf semieulerowski:

istnieje w nim droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu; czyli można przejść przez wszystkie krawędzie, żadnej nie powtarzając.

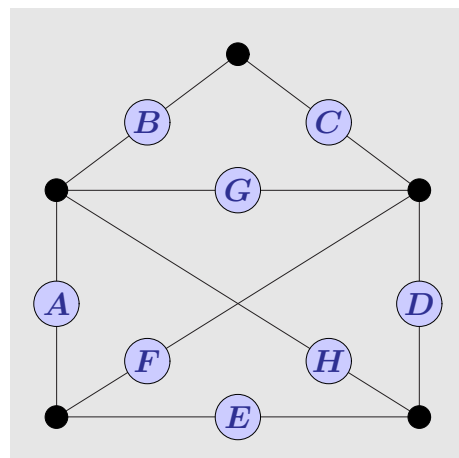
Graf eulerowski:

istnieje w nim cykl prosty zawierający wszystkie krawędzie grafu; czyli można przejść przez wszystkie krawędzie, żadnej nie powtarzając i powracając do punktu wyjścia.

Przykład:

graf obok jest semieulerowski, ale nie jest eulerowski. Droga prosta:

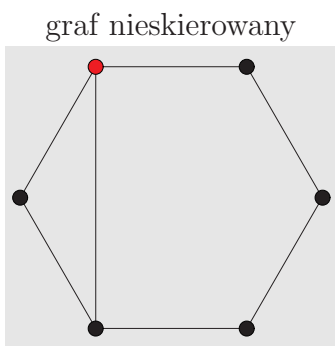
(A, B, C, D, E, F, G, H)



Stopień wierzchołka w grafie:

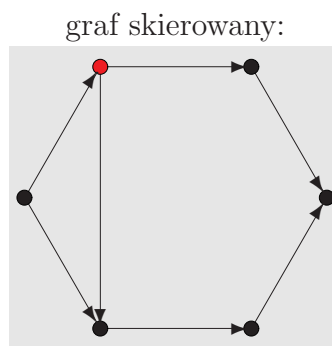
liczba wychodzących z niego krawędzi.

Przykład:



graf nieskierowany

wierzchołek stopnia 3



graf skierowany:

wierzchołek stopnia 2

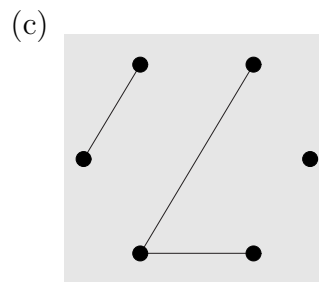
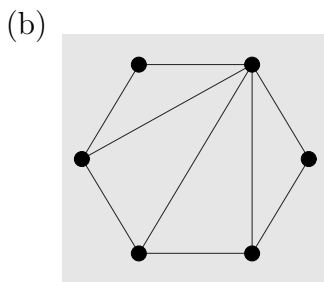
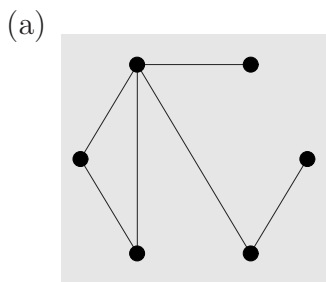
Twierdzenie:

Graf nieskierowany o liczbie wierzchołków większej niż 1 jest **eulerowski** wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i rząd każdego wierzchołka jest parzysty.

Graf nieskierowany o liczbie wierzchołków większej niż 1 jest **semieulerowski** wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i ma najwyżej 2 wierzchołki o rzędzie nieparzystym.

Zadanie 1:

Które z następujących grafów:



są

• spójne?

• dwudzielne?

• eulerowskie?

• semieulerowskie?

Zadanie 2:

Skonstruować graf nieskierowany o 5 wierzchołkach i 6 krawędziach, nie zawierający trójkąta (czyli cyklu długości 3).

Zadanie 3:

- (a) Czy istnieje graf nieskierowany o 6 wierzchołkach o stopniach rozgałęzienia odpowiednio 0, 1, 2, 3, 4, 5?
(b) Czy istnieje graf nieskierowany o 6 wierzchołkach, w którym 5 wierzchołków ma stopnie rozgałęzienia odpowiednio 0, 1, 2, 3, 4 (a stopień szóstego wierzchołka jest obojętny)?
-

Zadanie 4:

Odbywa się przyjęcie u państwa Szaradków. Oprócz pana Szaradka i pani Szaradkowej biorą w nim udział cztery inne pary. Ludzie wymieniają uściski dłoni między sobą, przy czym

- żadne dwie osoby nie robią tego dwa razy i
- nikt nie wita się ze swoim partnerem/partnerką.

Zarówno pan jak i pani domu uścisknęli dłonie gości co najmniej raz.

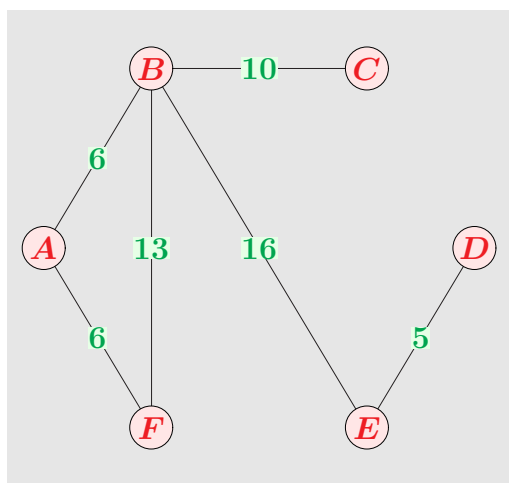
Pod koniec przyjęcia pan Szaradek zapytał wszystkich (oprócz siebie) o liczbę dokonanych uścisków. W odpowiedzi każda z 9 pytanых osób podała inną liczbę.

Ile uścisków dłoni dokonała pani Szaradkowa?

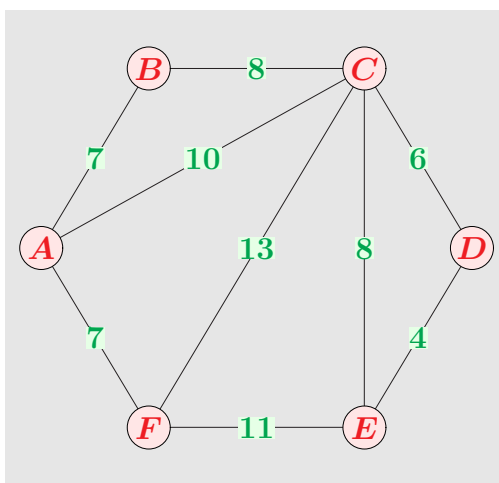
Zadanie 5:

Znaleźć jakieś drzewa (czyli podgrafy nieskierowane spójne i acykliczne) spinające dla poniższych grafów (t.zn. zawierające wszystkie ich wierzchołki):

(a)



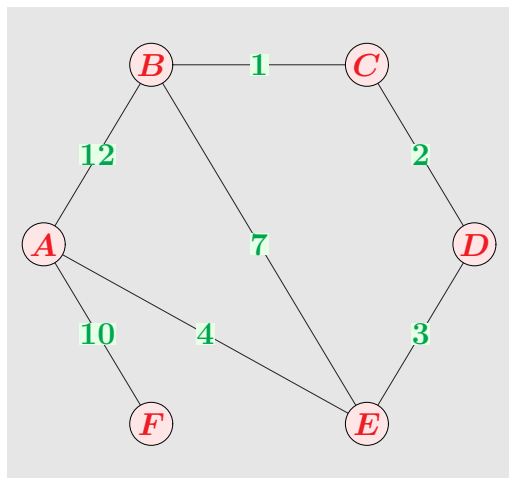
(b)



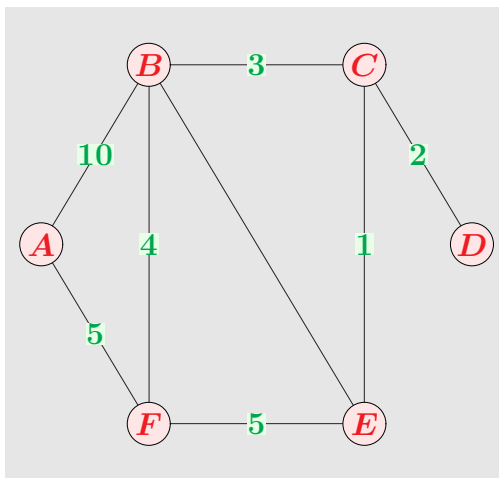
Zadanie 6:

Dla poniższych grafów napisać tablicę najkrótszych odległości od wierzchołka A do wszystkich innych wierzchołków (metodą Dijkstry).

(a)



(b)

**Zadanie 7:**

Dla jakich n graf kostki Q_n jest

- eulerowski?
- hamiltonowski (istnieje w nim droga przechodząca dokładnie po 1 razie przez każdy wierzchołek)?
- dwudzielny?

Zadanie 8:

Dla jakich wartości parametrów n i k poniższe grafy są eulerowskie, a dla jakich hamiltonowskie?

- graf pełny K_n ?
- graf pełny dwudzielny $K_{n,k}$?
- graf sześciangu?
- graf ośmiościanu?
- graf kostki Q_n ?

Zadanie 9:

Grafy z Zad. 5 przeszukać w głąb, wykorzystując ich reprezentację przez listy sąsiedztw i zaczynając od wierzchołka A .

Zadanie 10:

Założmy, że trzech chłopcy znają cztery dziewczęta jak w tabelce:

chłopiec	dziewczęta, które on zna		
A	W	Y	Z
B	X	Z	
C	X	Y	

Utworzyć trzy rozłączne pary chłopiec-dziewczyna, w których oboje się znają.