

Stefan Sokołowski

JĘZYKI FORMALNE I METODY KOMPILACJI

wykład 2

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2025/2026

Wykład 2, str. 1

Powtarzanie, a rekursja w produkcjach

Gramatyka dla $\{a^n \mid n \geq 0\}$?

$\begin{cases} A \rightarrow \lambda \\ A \rightarrow Aa \end{cases}$ rekursja **lewostronna**

$A \Rightarrow Aa \Rightarrow Aaa \Rightarrow Aaaa \Rightarrow \dots \Rightarrow aaa \dots a$

albo

$\begin{cases} A \rightarrow \lambda \\ A \rightarrow aA \end{cases}$ rekursja **prawostronna**

$A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaaA \Rightarrow \dots \Rightarrow a \dots aaa$

Powtarzanie, a rekursja w produkcjach

Gramatyka dla $\{a^{n_1}ba^{n_2}b \dots a^{n_k}b \mid k, n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0\}$?

$$\begin{cases} S \rightarrow \lambda \\ S \rightarrow SA \\ A \rightarrow b \\ A \rightarrow aA \end{cases} \begin{array}{l} \text{rekursja lewostronna} \\ \text{rekursja prawostronna} \end{array}$$

$$S \Rightarrow SA \Rightarrow SAA \Rightarrow^* aAaaA \Rightarrow^* abaaab$$

albo

$$\begin{cases} S \rightarrow \lambda \\ S \rightarrow AS \\ A \rightarrow b \\ A \rightarrow aA \end{cases} \begin{array}{l} \text{rekursja prawostronna} \\ \text{rekursja prawostronna} \end{array}$$

$$S \Rightarrow AS \Rightarrow AAS \Rightarrow^* aAaaaA \Rightarrow^* abaaab$$

Gramatyki prawoliniowe

DEFINICJA:

Gramatyka bezkontekstowa $G = \langle \Sigma, N, P, S \rangle$ jest *prawo-
wostronnie liniowa* jeśli każda produkcja w P ma po-
stać:

- albo $A \rightarrow x$ (czyli: żadnych nieterminali)
- albo $A \rightarrow xB$ (czyli: tylko jeden nieterminal po prawej)

gdzie $x \in \Sigma^*$ a $A, B \in N$.

praw. liniowe

bezkontekstowe

PRZYKŁAD:

$$\begin{array}{l} E \rightarrow aC \\ E \rightarrow bC \\ C \rightarrow \lambda \\ C \rightarrow aC \\ C \rightarrow bC \\ C \rightarrow 0C \\ C \rightarrow 1C \end{array}$$

prawoliniowa

Więc w prawoliniowych rekursja
może być tylko prawostronna.

$$\begin{array}{l} E \rightarrow a \\ E \rightarrow (E) \\ E \rightarrow E + E \end{array}$$

bezkontekstowa
ale nie prawoliniowa

Rodzaje gramatyk

PRZYKŁAD:

$$G_1: \begin{array}{l} E \rightarrow aC \\ E \rightarrow bC \\ C \rightarrow \lambda \\ C \rightarrow aC \\ C \rightarrow bC \\ C \rightarrow 0C \\ C \rightarrow 1C \end{array}$$

$$G_2: \begin{array}{l} I \rightarrow a \\ I \rightarrow b \\ I \rightarrow Ia \\ I \rightarrow Ib \\ I \rightarrow I0 \\ I \rightarrow I1 \end{array}$$

$$L(G_1) = \text{język identyfikatorów} = L(G_2)$$

G_1 jest prawostronnie liniowa
 G_2 jest bezkontekstowa
 ale nie prawostronnie liniowa

} dwie gramatyki **różnych typów** mogą określać ten sam język

DEFINICJA:

Język L jest

- **regularny** jeśli ist. gram. **prawostronnie liniowa** G taka, że $L = L(G)$;
- **bezkontekstowy** jeśli ist. gram. **bezkontekstowa** G taka, że $L = L(G)$.

PRZYKŁAD: Język identyfikatorów $L(G_2)$ jest regularny.

Rodzaje gramatyk

ZADANIE:

$$G_1: \begin{array}{l} A \rightarrow b \\ A \rightarrow c \\ A \rightarrow AA \end{array}$$

← gramatyka **nieprawoliniowa**

Czy $L(G_1)$ jest regularny?

Rozwiązanie:

$L(G_1) =$ zbiór niepustych napisów nad $\{b, c\}$

$L(G_2) =$ zbiór niepustych napisów nad $\{b, c\}$

$$G_2: \begin{array}{l} A \rightarrow b \\ A \rightarrow c \\ A \rightarrow bA \\ A \rightarrow cA \end{array}$$

$L(G_1) = L(G_2)$ i gramatyka G_2 jest prawoliniowa.

Ponieważ istnieje prawoliniowa gramatyka G_2 **równoważna** gramatyce G_1 (czyli generująca ten sam język), więc $L(G_1)$ **jest regularny**.

Rodzaje gramatyk

Język zadany gramatyką **prawoliniową**
jest regularny.

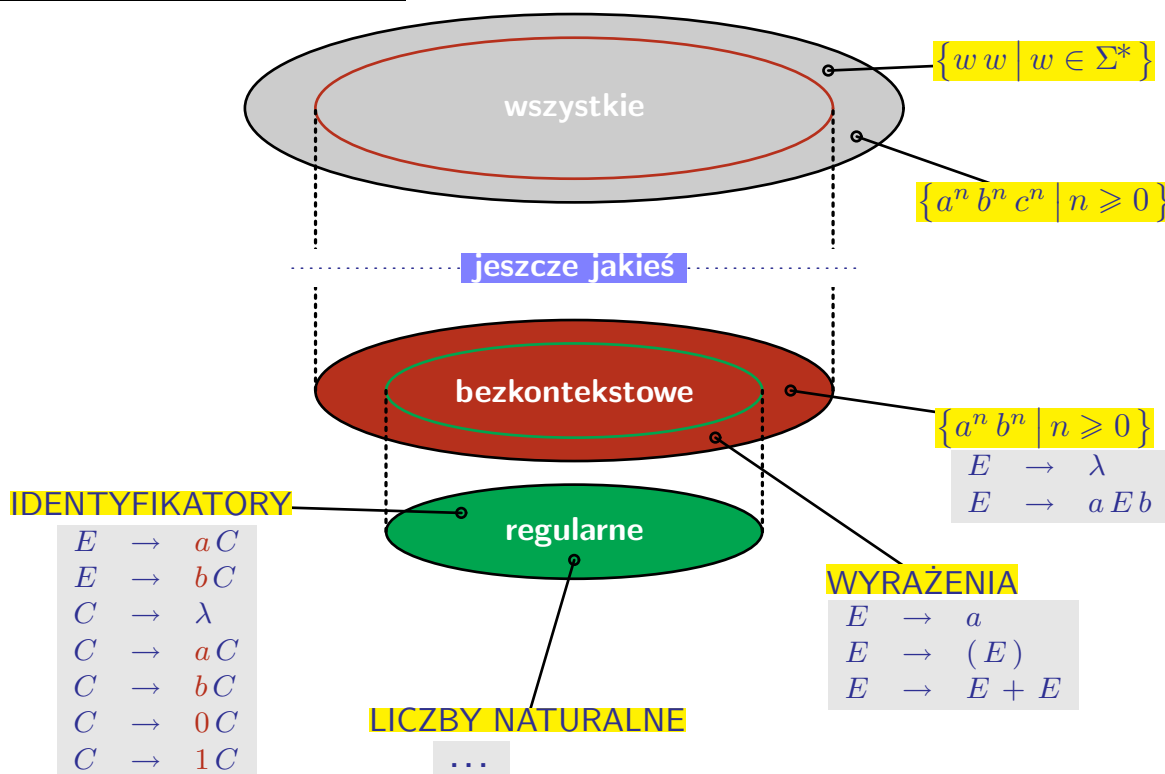
Język zadany bezkontekstową gramatyką **nieprawoliniową**
może nie być regularny,
może być regularny,
— potrzebne jest staranniejsze zbadanie.

Hierarchia języków



Noam Chomsky, ur. 1928, MIT
„the father of modern linguistics”

Hierarchia języków



Czy dany język jest bezkontekstowy lub regularny?

Żeby dowieść, że język **jest** bezkontekstowy [ew. regularny], należy znaleźć dla niego gramatykę bezkontekstową [prawoliniową].

Żeby dowieść, że język **nie jest** bezkontekstowy [regularny], należy udowodnić, że nie posiada gramatyki bezkontekstowej [prawoliniowej] — to jest **na ogół trudne**.

Bardzo nieformalne kryteria negatywne:

1. Rozpoznanie słowa języka **regularnego** nie wymaga porównywania liczby liter.
Np. język $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nie jest regularny.
2. Rozpoznanie słowa języka **bezkontekstowego** może wymagać porównania liczby liter ale tylko w dwóch blokach.
Np. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ jest a $\{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}$ nie jest bezkontekstowy.
3. Rozpoznanie słowa języka **bezkontekstowego** może wymagać **porównania** liczby liter j.w., ale nie może wymagać **obliczeń** arytmetycznych.
Np. $\{a^n b^{n^2} \mid n \geq 0\}$ nie jest bezkontekstowy.
4. Rozpoznanie słowa języka **bezkontekstowego** nie może wymagać pamiętania słów bez ograniczenia długości.
Np. $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$ jest a $\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ nie jest bezkontekstowy.

Definiowanie języka przez wyrażenie regularne (WR)

Języki **regularne** (ale nie dowolne bezkontekstowe) można definiować bez użycia nieterminali. Często jest to prostsze i czytelniejsze niż podawanie gramatyki.

Wyrażenia regularne spotyka się w różnych postaciach; na przykład

- w **komendach uniksowej konsoli** tekstowej, np.:

usuń z akt. katalogu wszystkie pliki o nazwach zawierających myślnik:

```
rm *-*
```

- w **językach programowania**; np. w Javie:

sprawdź, czy dany napis zawiera myślnik:

```
iis.ans-elblag.pl/~stefan/Dydaktyka/JezForm/Wyklady/02-pom/Wzorze.java
```

- w **edytorach** przy szukaniu i zastępowaniu, np.

wszystkie myślniki wydzielone spacjami zastąp przez podkreślone odstępy:

```
Alt-X replace-regexp
" _ "
" _ "
```

Definiowanie języka przez wyrażenie regularne (WR)

DEFINICJA: (wyrażenia regularne)

(specjalne znaki nie należące do alfabetu: {, }, |, *,)

- **lity** alfabetu są WR
- **złożenie (konkatenacja)** WR jest WR:
jeśli W_1 i W_2 są WR, to $\{W_1 W_2\}$ jest WR
- **suma** WR jest WR:
jeśli W_1 i W_2 są WR, to $\{W_1 \mid W_2\}$ jest WR
- **domk. Kleenego (iteracja)** WR jest WR:
jeśli W jest WR, to $\{W\}^*$ jest WR

Umowa notacyjna: opuszczamy zbędne klamry, przyjmując, że

- najsilniej łączy $*$ a najsłabiej $|$,
- złożenie i suma łączą do lewej.

Np. zamiast

$$\left\{ \left\{ \left\{ \{ab\} a \right\} \mid \left\{ a \{c\}^* \right\} \right\} \mid \{cb\} \right\}$$

można napisać

$$\underline{\underline{\underline{aba} \mid ac^* \mid cb}}}$$

Definiowanie języka przez wyrażenie regularne (WR)

Każdemu wyrażeniu regularnemu **odpowiada** język:

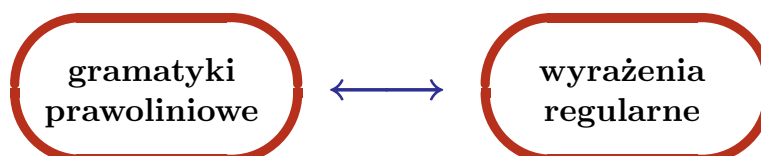
- pojedynczej literze σ **odpowiada** jednowyrazowy język $\{\sigma\}$
- jeśli wyrażeniu W_1 **odpowiada** język L_1
a wyrażeniu W_2 **odpowiada** język L_2 ,
to wyrażeniu $\{W_1 W_2\}$ **odpowiada** język złożen (konkatenacji)
 $\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$
- jeśli wyrażeniu W_1 **odpowiada** język L_1
a wyrażeniu W_2 **odpowiada** język L_2 ,
to wyrażeniu $\{W_1 \mid W_2\}$ **odpowiada** suma języków
 $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$
- jeśli wyrażeniu W **odpowiada** język L ,
to wyrażeniu $\{W\}^*$ **odpowiada** nieskończona suma języków
 $\{\lambda\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup LLLL \cup \dots$

Wyrażenia regularne a języki regularne

TWIERDZENIE:

Każdy **język regularny** odpowiada jakiemuś **wyrażeniu regularnemu**.

Każdy język, który **odpowiada** jakiemuś **wyrażeniu regularnemu**, jest **regularny**.



Czyli:

Języki regularne można definiować

- albo przy pomocy **gramatyk prawoliniowych**,
- albo przy pomocy **wyrażeń regularnych**

— to wychodzi na jedno.

Wyrażenia regularne a języki regularne

PRZYKŁAD:

Gramatyka prawoliniowa:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \lambda \\ S &\rightarrow abS \\ S &\rightarrow cS \end{aligned}$$



Wyrażenie regularne:

$$\{ab \mid c\}^*$$

PRZYKŁAD:

Wyrażenie regularne:

$$a^*c^* \mid ba$$



Gramatyka prawoliniowa:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ S &\rightarrow ba \\ A &\rightarrow C \\ A &\rightarrow aA \\ C &\rightarrow \lambda \\ C &\rightarrow cC \end{aligned}$$

Proste przejście między gramatyką regularną a wyrażeniem regularnym.

Wyrażenia regularne

Wyrażenie regularne jest **wzorcem** słowa z języka:

- $\mid$ oznacza „lub”,
- $*$ oznacza powtarzanie (0 lub więcej razy)

PRZYKŁAD:

$$\{0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}$$

do tego wzorca pasuje dowolna cyfra

$$\{a \mid b\}c \quad \mid \quad a \mid bc$$

jedno ze słów ac i bc jedno ze słów a i bc

$$\{a \mid b\}^* \quad \mid \quad a^* \mid b^*$$

dowolne słowo napisane literami a i b (łącznie z λ) słowo z samych liter a lub słowo z samych liter b

Wyrażenia regularne

Wyrażenie regularne jest **wzorcem** słowa z języka:

- $|$ oznacza „lub”,
- $*$ oznacza powtarzanie (0 lub więcej razy)

PRZYKŁAD:

$\{ab\}^*$	a^*b^*
słowa postaci $ab\ ab\ \dots\ ab$	słowa postaci $aa\dots a\ bb\dots b$

$\{a^*b\}^*$
słowa postaci $aa\dots b\ aa\dots b\ \dots\ aa\dots b$

$\{0\ |\ \dots\ |\ 9\}\{0\ |\ \dots\ |\ 9\} - \{0\ |\ \dots\ |\ 9\}\{0\ |\ \dots\ |\ 9\}\{0\ |\ \dots\ |\ 9\}$
dowolny kod pocztowy (dwie cyfry, myślnik, trzy cyfry)

Wyrażenia regularne

W „prawdziwym” świecie postać wyrażenia regularnego jest na ogół znacznie bardziej skomplikowana,

ale

w zasadzie daje się sprowadzić do tych omówionych:

- pojedyncza litera alfabetu
- złożenie (konkatenacja)
- suma
- domk. Kleenego (iteracja)