

Stefan Sokołowski

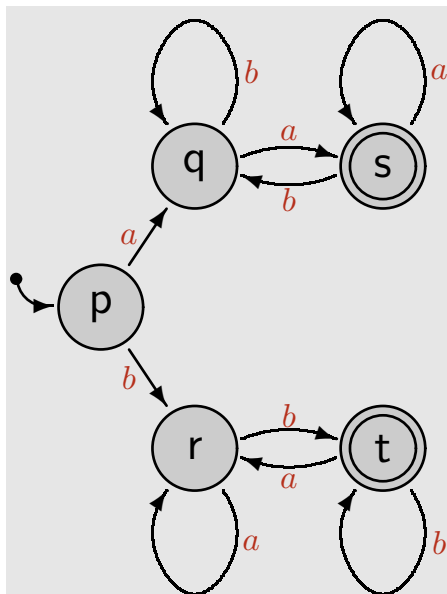
JĘZYKI FORMALNE I METODY KOMPILACJI

wykład 4

Inst. Informatyki Stosowanej, ANS
Elbląg, 2025/2026

Wykład 4, str. 1

Akceptory: automaty skończone



Słowo *abab*:

$$\begin{aligned}\delta^*\langle p, abab \rangle &= \delta^*\langle q, bab \rangle = \delta^*\langle q, ab \rangle \\ &= \delta^*\langle s, b \rangle = \delta^*\langle q, \lambda \rangle = q\end{aligned}$$

odrzucone.

Słowo *baab*:

$$\begin{aligned}\delta^*\langle p, baab \rangle &= \delta^*\langle r, aab \rangle = \delta^*\langle r, ab \rangle \\ &= \delta^*\langle r, b \rangle = \delta^*\langle t, \lambda \rangle = t\end{aligned}$$

zaakceptowane.

Słowo λ : $\delta^*\langle p, \lambda \rangle = p$ odrzucone.

Słowo *abbaba*:

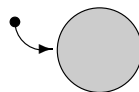
$$\begin{aligned}\delta^*\langle p, abbaba \rangle &= \delta^*\langle q, bbaba \rangle \\ &= \delta^*\langle q, baba \rangle = \delta^*\langle q, aba \rangle \\ &= \delta^*\langle s, ba \rangle = \delta^*\langle q, a \rangle = \delta^*\langle s, \lambda \rangle = s\end{aligned}$$

zaakceptowane.

Akceptacja słowa — od stanu początkowego do akceptującego.

Konstrukcja automatu skończonego

- dokładnie jeden stan *początkowy*



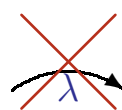
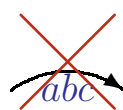
- dowolnie wiele stanów *końcowych* (*akceptujących*)



- między stanami *strzałki* (*tranzycje*)

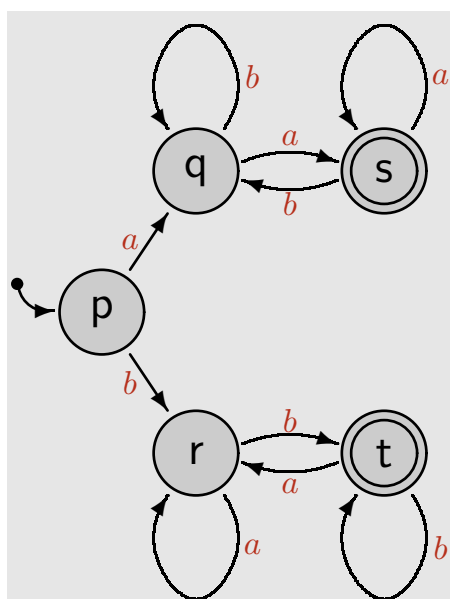


- na strzałkach stoją **pojedyncze** litery alfabetu



- z każdego stanu wychodzi po **jednej** strzałce dla **każdej** litery alfabetu

Akceptory: automaty skończone



Funkcja przejścia automatu:

δ	a	b
p	q	r
q	s	q
r	r	t
s	s	q
t	r	t

$$\begin{aligned}
 \delta^* \langle p, baab \rangle &= \delta^* \langle \delta \langle p, b \rangle, aab \rangle \\
 &= \delta^* \langle r, aab \rangle = \delta^* \langle \delta \langle r, a \rangle, ab \rangle \\
 &= \delta^* \langle r, ab \rangle = \delta^* \langle \delta \langle r, a \rangle, b \rangle \\
 &= \delta^* \langle r, b \rangle = \delta^* \langle \delta \langle r, b \rangle, \lambda \rangle \\
 &= \delta^* \langle t, \lambda \rangle = t
 \end{aligned}$$

Akceptacja słowa w : jeśli $\delta^* \langle p, w \rangle$ jest stanem akceptującym.

Automaty skończone

DEFINICJA: Deterministyczny automat skończony M —

- skończony zbiór Q *stanów*,
- skończony zbiór Σ *liter*,
- funkcja *przejścia* $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$,
- wyróżniony stan *początkowy* $q_0 \in Q$,
- wyróżniony zbiór stanów *końcowych* (*akceptujących*) $F \subseteq Q$.

DEFINICJA: Uogólniona funkcja przejścia — $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$:

$$\delta^*\langle q, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} q & \text{jeśli } w = \lambda \\ \delta^*\langle \delta\langle q, \sigma \rangle, w' \rangle & \text{jeśli } w = \sigma w' \\ & \text{dla pewnych } \sigma \in \Sigma \text{ i } w' \in \Sigma^* \end{cases}$$

DEFINICJA: Automat M akceptuje słowo w jeśli $\delta^*\langle q_0, w \rangle \in F$

DEFINICJA: Język akceptowany przez automat $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$:

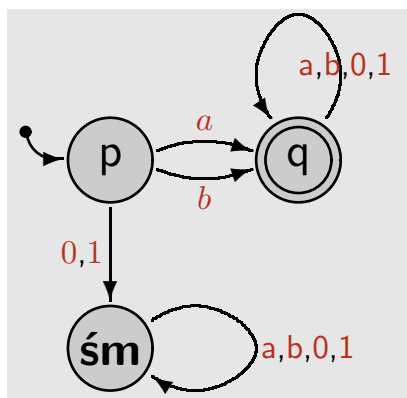
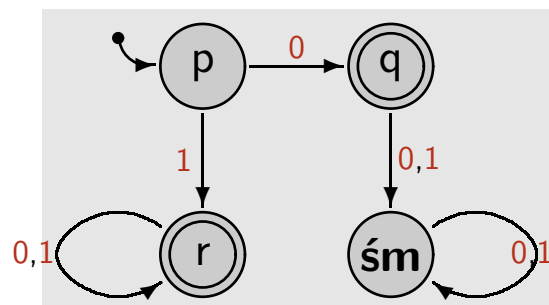
$$L(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akceptuje } w\} = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*\langle q_0, w \rangle \in F\}$$

Wyrażenia regularne a automaty skończone

PRZYKŁAD:

Język liczb naturalnych:

$$L(\overbrace{0 \mid 1 \{0 \mid 1\}^*})^{\text{wyr.reg.}} = \{0\} \cup \{1w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$



PRZYKŁAD:

Język identyfikatorów:

$$\{wv \mid w \in \{a, b\} \wedge v \in \{a, b, 0, 1\}^*\} = L(\underbrace{\{a \mid b\} \{a \mid b \mid 0 \mid 1\}^*}_{\text{wyr.reg.}})$$

Automaty skończone a gramatyki prawoliniowe

TWIERDZENIE:

Dla każdego automatu skończonego M język $L(M)$ jest *regularny*.

Dla każdego języka regularnego L istnieje automat skończony M taki że $L = L(M)$.

PRZYKŁAD:

gramatyka prawoliniowa	wyrażenie regularne	automat skończony
$\langle S \rangle ::= \lambda \mid abb \langle S \rangle$	$\{abb\}^*$	

Automaty skończone a gramatyki prawoliniowe

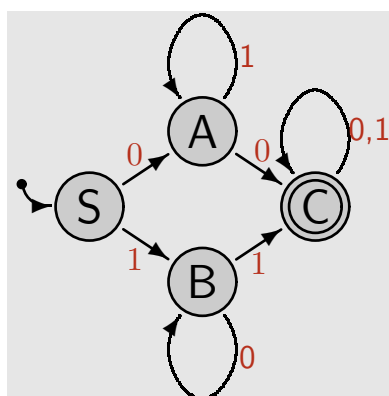
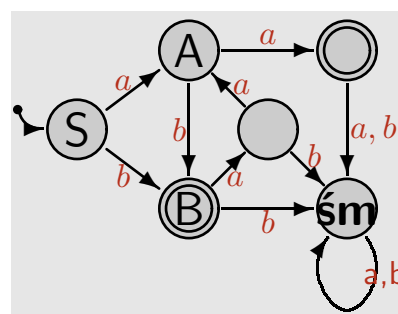
PRZYKŁAD:

Gramatyka prawoliniowa G :

$$\langle S \rangle ::= a \langle A \rangle \mid b \langle B \rangle$$

$$\langle A \rangle ::= a \mid b \langle B \rangle$$

$$\langle B \rangle ::= \lambda \mid aa \langle A \rangle$$



PRZYKŁAD:

Gramatyka prawoliniowa:

$$\langle S \rangle ::= 0 \langle A \rangle \mid 1 \langle B \rangle$$

$$\langle A \rangle ::= 0 \langle C \rangle \mid 1 \langle A \rangle$$

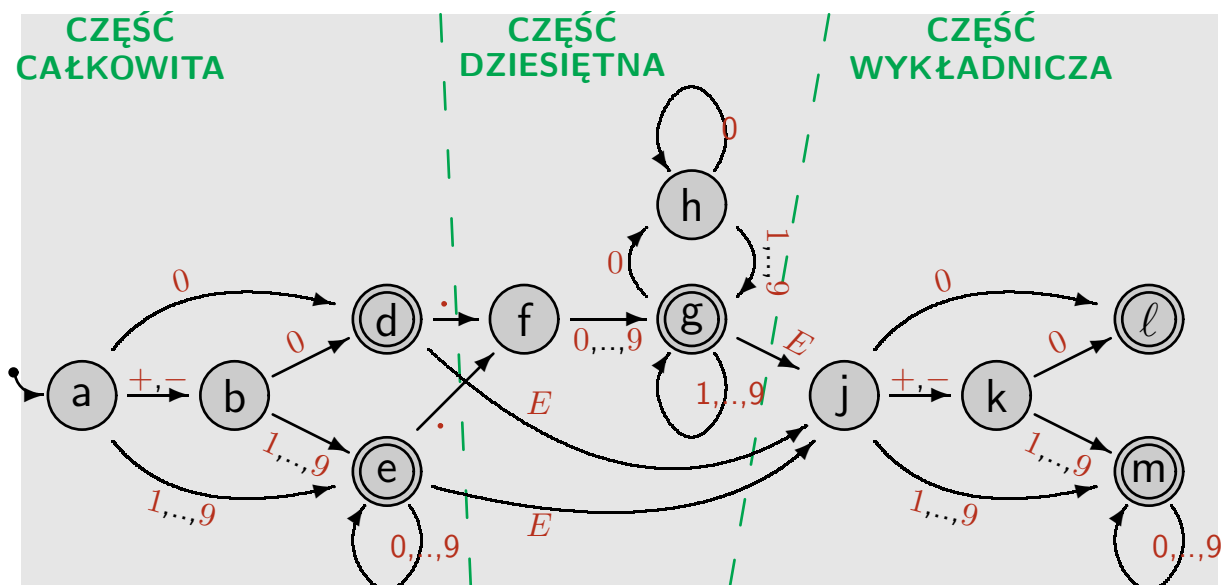
$$\langle B \rangle ::= 0 \langle B \rangle \mid 1 \langle C \rangle$$

$$\langle C \rangle ::= \lambda \mid 0 \langle C \rangle \mid 1 \langle C \rangle$$

Automaty skończone

Automat akceptujący liczby rzeczywiste takie jak na przykład:

1234 - 0.001 6.02E - 23



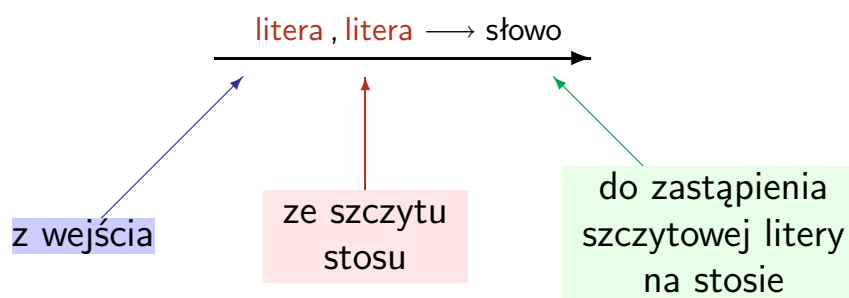
Maszyna ze stosem

— jakby automat, ale z **nieskończonym stosem**, na którym można przechowywać litery wg zasady

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Last} \\ \text{In} \\ \text{First} \\ \text{Out} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{kto ostatni} \\ \text{przyszedł,} \\ \text{pierwszy} \\ \text{wychodzi} \end{array} \right\}$

b
a
b
b
a
Z

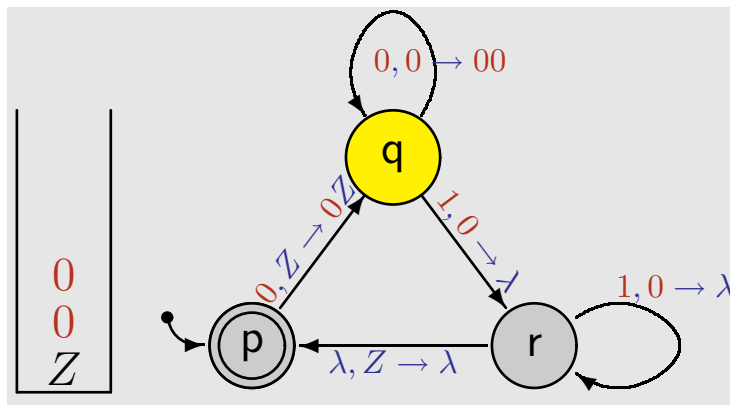
Strzałki mają postać:



Maszyna ze stosem

Słowo na wejściu:

0 0 1 1
 └─ część
 nieprzeczytana



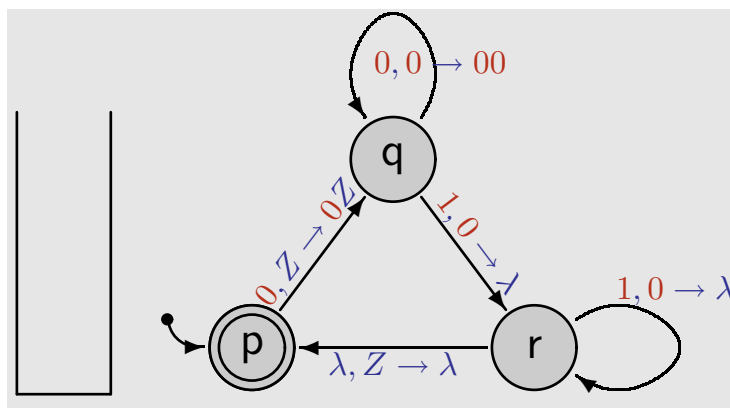
Kiedy wędrówka po maszynie się „zatnie”, czyli nie ma już żadnej możliwości pójścia dalej, sprawdzamy, czy słowo zostało **zaakceptowane**; t.zn., czy spełnione są następujące warunki:

- na **wejściu** jest słowo puste (wszystko już przeczytane);
- na **stosie** jest słowo puste;
- sprawdzanie zakończyło się w **stanie** końcowym (akceptującym).

Maszyna ze stosem

Język akceptowany:

$\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$



wejście		0		1		λ	
stos		Z	0	Z	0	Z	0
stan	p	$\langle q, 0Z \rangle$					
	q		$\langle q, 00 \rangle$		$\langle r, \lambda \rangle$		
	r			$\langle r, \lambda \rangle$		$\langle p, \lambda \rangle$	

Maszyna ze stosem

DEFINICJA: Maszyna ze stosem M —

- skończony zbiór Q *stanów*,
- skończony zbiór Σ *liter wejściowych*,
- skończony zbiór Γ *symboli stosowych*,
- $Z \in \Gamma$ — wyróżniony symbol stosowy oznaczający dno stosu,
- częściowa funkcja *przejścia* $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightrightarrows Q \times \Gamma^*$
(częściowa — t.zn. nie musi być określona dla wszystkich argumentów),
- wyróżniony stan *początkowy* $q_0 \in Q$,
- wyróżniony zbiór stanów *końcowych* (*akceptujących*) $F \subseteq Q$.

DEFINICJA: Język akceptowany przez M —

$$L(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid \delta^* \langle q_0, w, Z \rangle = \langle q', \lambda, \lambda \rangle \text{ dla pewnego } q' \in F\}$$

gdzie δ^* jest uogólnioną funkcją przejścia.

Maszyna ze stosem a języki bezkontekstowe

TWIERDZENIE:

Język akceptowany przez dowolną maszynę stosową jest bezkontekstowy.

Uwaga:

Nie każdy język bezkontekstowy jest akceptowany przez jakąś *maszynę stosową*; ale każdy jest akceptowany przez jakąś *niedeterministyczną maszynę stosową* (nierozpatrywane na tym wykładzie).

„Prawie” każdy „praktyczny” język bezkontekstowy jest akceptowany przez jakąś *maszynę stosową*; to umożliwia kompilowanie programów komputerowych.

Gramatyki, języki, maszyny

